Serie 2

Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

0. (Bereich eines Quantors, Gebundenheit und Freiheit einer Variable, Satz) Seien P, R Relationssymbole (in der Signatur $\mathscr{L}$) der Stelligkeiten $1, 2$. Tun Sie für jede der unteren Formeln φ das Folgende:

(a) Bereich jedes Quantors bestimmen

(b) für jede Variable die Stellen bestimmen, an welchen die Variable gebunden vorkommt

(c) bestimmen, welcher Quantor die Variable jeweils bindet

(d) $\mathrm{frei}(\varphi)$ bestimmen. Das ist die Menge aller Variablen, die in φ (an mindestens einer Stelle) frei vorkommen.

(e) entscheiden, ob φ ein Satz ist

Formeln φ in Präfixform:

$\exists y\, Rxy \qquad \forall x \exists y\, Rxy \qquad \vee \exists x\, Px \;= xy \qquad$ **(∗)** $\forall x \vee \exists x\, Px \;= xy \qquad \to \exists x\, Px\, \forall y\, Ryy$

1. (Substitution, Zulässigkeit) Seien c ein Konstantensymbol, F ein Funktionssymbol der Stelligkeit 1 und P, R Relationssymbole der Stelligkeiten $1, 2$. Bestimmen Sie für jedes Tripel φ, ν, τ wie unten die Formel $\varphi(\nu/\tau)$, d. h. die Formel, die wir erhalten, indem wir an jeder Stelle, an der ν in der Formel φ frei vorkommt, die Variable ν durch den Term τ ersetzen. Geben Sie an, ob die Substitution zulässig ist. Wir verwenden hier die Infixnotation für die logischen Verknüpfungen und zweistellige Relationssymbole.

φ	ν	τ
xRy	x	c
yRx	x	y
$\forall y\, Px$	x	y
$\forall y\, Px$	x	Fx
$\forall x\, Px$	x	y
(∗) $Px \vee \exists x\, Px$	x	Fx

2. (logische Axiome)

(a) Geben Sie eine Instanz des logischen Axiomenschemas L_3 an.

(b) Seien x, x', y, y', z Variablen und F ein einstelliges Funktionssymbol. Von welchem logischen Axiomenschema ist jede der folgenden Formeln eine Instanz?

i. $\big(x = y \wedge \forall x\, \neg x = x\big) \to x = y$

ii. $x = y \to \Big(y = x \to \big(y = x \wedge x = y\big)\Big)$

iii. $\forall z\, z = y \to Fx = y$
iv. **(∗)** $\big(x = x' \wedge y = y'\big) \to \big(x = y \to x' = y'\big)$

(c) Überlegen Sie sich für die Axiomenschemata L_0, L_1, L_5, dass diese intuitiv allgemein gültigen Aussagen entsprechen. Bestimmen Sie dazu die entsprechenden Wahrheitstabellen.

3. (Konjunktion, Existenz) Schreiben Sie einen formalen Beweis der Formel ψ aus Φ auf, für jedes der folgenden Paare Φ, ψ:

(a) $\{\alpha \wedge \beta\}, \alpha$

(b) $\{\alpha \wedge \beta\}, \beta$

(c) **(∗)** $\{\alpha, \beta\}, \alpha \wedge \beta$

(d) $\varnothing, \exists x(x = x)$

4. Zeigen Sie:

(a) **(∗)** $\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi$
Tipp: Verwenden Sie **3**.

(b) $\vdash \psi \vee \varphi \to \varphi \vee \psi$
Tipps: Verwenden Sie:

- L_8 mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ so gewählt, dass $\psi \vee \varphi \to \varphi \vee \psi$ eine Teilformel von L_8 ist
- L_7, (MP) = Modus Ponens

(c) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$
Tipp: Verwenden Sie L_8 mit $\varphi_1 \equiv \neg\varphi,\ \varphi_2 \equiv \neg\neg\varphi$ und $\varphi_3 \equiv \varphi \to \neg\neg\varphi$.

In den Lösungen zu den nachfolgenden Aufgaben werden wir an vielen Stellen das folgende Theorem verwenden, das nächste Woche in der Vorlesung behandelt wird.

THEOREM 1 (DEDUKTIONSTHEOREM (DT)) *Sei $\mathscr{L}$ eine Signatur, Φ eine Menge von ($\mathscr{L}$-)Formeln und ψ eine Formel. Es gilt $\Phi \vdash \psi \to \varphi$ genau dann, falls $\Phi + \psi \vdash \varphi$.*

Hierbei bezeichnet $\Phi + \psi$ die Vereinigung der Menge Φ mit $\{\psi\}$.

5. (Beweis gewisser Äquivalenzen) Seien χ und ξ Formeln. Wir schreiben abkürzend

$$\chi \leftrightarrow \xi$$

für $(\chi \to \xi) \wedge (\xi \to \chi)$. Das bedeutet, dass wir in jeder Formel jede Teilformel der Form $(\chi \to \xi) \wedge (\xi \to \chi)$ durch $\chi \leftrightarrow \xi$ ersetzen dürfen und umgekehrt. Zeigen Sie das Folgende:

(a) **(∗)** $\vdash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$
Tipp: Verwenden Sie **4**.a, das DEDUKTIONSTHEOREM und **3**.c.

(b) $\vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$
Tipp: **4**.b

(c) $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$ (duplex negatio affirmat = Gesetz der doppelten Negation)

Tipps:

- **4**.c

  Beweis von $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$:
- DEDUKTIONSTHEOREM
- L_9 mit φ ersetzt durch $\neg\varphi$ und $\psi \equiv \varphi$
- L_8 mit $\varphi_1 \equiv \varphi,\ \varphi_2 \equiv \neg\varphi,\ \varphi_3 \equiv \varphi$
- $\vdash \varphi \to \varphi$ (Beispiel in der Vorlesung)

(d) $\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \psi)$

Tipps für $\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$:

- Überlegen Sie sich, dass es genügt, das Folgende zu zeigen:

$$\{\neg\varphi \vee \psi, \varphi\} \vdash \psi$$

  Tipps dafür:
  - $\varphi \vdash \neg\varphi \to \psi$
    Tipp dafür: $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$ (siehe **5**.c) und L_9
  - L_8 mit $\varphi_1 \equiv \neg\varphi,\ \varphi_2 \equiv \psi,\ \varphi_3 \equiv \psi$ und $\varphi \vdash \neg\varphi \to \psi$.

Wir definieren

$$\chi :\equiv (\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \vee \psi)$$

Tipps für $\vdash \chi$:

- Zeigen Sie mittels L_7, dass

$$\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \neg\varphi \vee \psi \tag{1}$$

- Zeigen Sie, dass

$$\{\neg\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \neg\varphi \vee \psi \tag{2}$$

- Folgern Sie aus (1), dass $\vdash \varphi \to \chi$.
- Folgern Sie aus (2), dass $\vdash \neg\varphi \to \chi$.
- Verwenden Sie L_8 mit $\varphi_1 \equiv \varphi,\ \varphi_2 \equiv \neg\varphi,\ \varphi_3 \equiv \chi$.

(e) $\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$ (Kontraposition)

Tipps:

- Zeigen Sie:

$$\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \neg\neg\psi) \tag{3}$$

  Tipps dazu:

$$\beta \to \gamma \vdash \alpha \to (\beta \to \gamma) \tag{4}$$
$$\alpha \to (\beta \to \gamma) \vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \tag{5}$$

  Verwenden Sie dazu je ein Axiom und das DEDUKTIONSTHEOREM. Kombinieren Sie (4) und (5) für $\alpha \equiv \varphi,\ \beta \equiv \psi,\ \gamma \equiv \neg\neg\psi$. Verwenden Sie (**5**.c). Das zeigt die Hälfte von (3). Die andere Hälfte folgt aus einem analogen Argument.

- Verwenden Sie (3), **5**.d, **5**.b, **5**.d und **6**., um $\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$ zu zeigen.

(f) $\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$ (ex falso quodlibet = aus Falschem folgt Beliebiges)

6. (Logische Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.) Wir sagen, dass zwei Formeln α, β *logisch äquivalent* sind g. d. w. :

$$\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$$

In diesem Fall schreiben wir:

$$\alpha \Leftrightarrow \beta$$

Zeigen Sie das Folgende:

(a) Logische Äquivalenz ist symmetrisch, d. h. für alle Formeln α, β gilt:

$$\alpha \Leftrightarrow \beta \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \beta \Leftrightarrow \alpha$$

Tipp: Aufgabe **3**.

(b) **(∗)** Logische Äquivalenz ist transitiv, d. h. für alle Formeln α, β, γ gilt:

$$\text{Wenn} \quad \alpha \Leftrightarrow \beta \quad \text{und} \quad \beta \Leftrightarrow \gamma, \quad \text{dann} \quad \alpha \Leftrightarrow \gamma$$

Tipp: Aufgabe **3**. und DEDUKTIONSTHEOREM

Bemerkung: In der Vorlesung wird gezeigt, dass logische Äquivalenz reflexiv ist. Also ist logische Äquivalenz eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Formeln.

7. (Gleichheitsrelation transitiv) Zeigen Sie, dass die Gleichheitsrelation "=" transitiv ist, d. h. zeigen Sie, dass gilt:

$$\vdash \forall x \forall y \forall z \big((x = y \wedge y = z) \to x = z\big)$$

Bemerkung: In der Vorlesung zeigen wir, dass die Gleichheitsrelation auch reflexiv und symmetrisch ist. Sie ist also eine Äquivalenzrelation.