Serie 3

Satz über logische Äquivalenz, Peano-Arithmetik, Gruppentheorie, semi-formaler Beweis

---

Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

0. Seien $\mathscr{L}$ eine Signatur und φ, ψ $\mathscr{L}$-Formeln. Zeigen Sie das Folgende:

(a) **(∗)** $\vdash \varphi \to \big(\psi \to (\varphi \wedge \psi)\big)$
Bemerkung: Beachten Sie die Reihenfolge in der Konjunktion $\varphi \wedge \psi$.

(b) $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$

Hinweis: Verwenden Sie das Folgende:

- jeweils ein logisches Axiom
- einen Satz aus der Vorlesung
- eine logische Äquivalenz, die in Serie 2 bewiesen wurde
- $\varphi \Leftrightarrow \psi$ g. d. w. $\varphi \vdash \psi$ und $\psi \vdash \varphi$
(Überlegen Sie sich das. Verwenden Sie dazu das DEDUKTIONSTHEOREM.)

1. Die Signatur der Peano-Arithmetik ist $\mathscr{L}_{\mathrm{PA}} := \{0, \mathrm{s}, +, \cdot\}$, wobei 0 ein Konstantensymbol und $\mathrm{s}, +, \cdot$ Funktionssymbole der Stelligkeiten $1, 2, 2$ sind. Die Axiome der Peano-Arithmetik PA sind durch das folgende Axiomensystem gegeben. Rechts neben jedem Axiom ist seine intuitive Bedeutung angegeben.

$\mathsf{PA}_0 : \neg\exists x(\mathrm{s}\,x = 0)$ (0 ist kein Nachfolger.)

$\mathsf{PA}_1 : \forall x\forall y\big(\mathrm{s}\,x = \mathrm{s}\,y \to x = y\big)$ (s ist injektiv.)

$\mathsf{PA}_2 : \forall x(x + 0 = x)$ (0 ist rechts-neutral.)

$\mathsf{PA}_3 : \forall x\forall y\big(x + \mathrm{s}\,y = \mathrm{s}(x + y)\big)$ (Das definiert mit PA_2 zusammen $+$.)

$\mathsf{PA}_4 : \forall x(x \cdot 0 = 0)$ (Das definiert $x \cdot 0$.)

$\mathsf{PA}_5 : \forall x\forall y\big(x \cdot \mathrm{s}\,y = (x \cdot y) + x\big)$ (Das definiert mit PA_4 zusammen $\cdot$.)

Sei φ eine $\mathscr{L}_{\mathrm{PA}}$-Formel und $\nu \in \mathrm{frei}\,\varphi$ eine Variable.

$$\mathsf{PA}_6 : \forall x\forall y\Big(\varphi(0) \wedge \forall\nu\big(\varphi(\nu) \to \varphi(\mathrm{s}\,\nu)\big)\Big) \to \forall\nu\varphi(\nu) \qquad \text{(Induktion)}$$

(a) **(∗)** Was bedeutet die folgende $\mathscr{L}_{\mathrm{PA}}$-Formel intuitiv?

$$\mathtt{s0 + s0 = ss0}$$

(b) (∗) Zeigen Sie mittels eines formalen Beweises:

$$\mathsf{PA} \vdash \mathtt{s}\,0 + \mathtt{s}\,0 = \mathtt{s}\,\mathtt{s}\,0$$

Hinweise:

- Leiten Sie aus PA_3 und zweimal L_{10} (universal instantiation) die folgende Formel her:
$$\chi :\equiv \mathrm{s}\,0 + \mathrm{s}\,0 = \mathrm{s}(\mathrm{s}\,0 + 0)$$
- Leiten Sie aus PA_2, L_{10} und L_{16} die folgende Formel her:
$$\varphi :\equiv \mathrm{s}(\mathrm{s}\,0 + 0) = \mathrm{s}\,\mathrm{s}\,0$$
- Wir definieren $\psi :\equiv \mathrm{s}\,0 + s0 = \mathrm{s}\,0 + s0$. Leiten Sie mittels L_{14} und L_5 die Formel $\psi \wedge \varphi$ her.
- Leiten Sie aus $\psi \wedge \varphi$, L_{15} und χ die Formel $\mathrm{s}\,0 + \mathrm{s}\,0 = \mathrm{s}\,\mathrm{s}\,0$ her.

2. (a) Was bedeutet die folgende Formel der PA (Peano-Arithmetik) intuitiv?

$$\forall x\big(x = \mathtt{0} \vee \exists y(x = \mathtt{s}y)\big)$$

(b) Zeigen Sie mittels eines formalen Beweises:

$$\mathsf{PA} \vdash \forall x\big(x = \mathtt{0} \vee \exists y(x = \mathtt{s}y)\big)$$

Hinweise:

- Wir definieren $\varphi(x) :\equiv x = \mathtt{0} \vee \exists y(x = \mathtt{s}y)$. Verwenden Sie Induktion, also PA_6, um die Formel $\forall x \varphi(x)$ herzuleiten.
- Leiten Sie die **Induktionsverankerung** $\varphi(x/0)$ aus $\mathrm{L}_{14}, \mathrm{L}_6$ her.
- **Induktionsschritt** $\forall x\big(\varphi(x) \to \varphi(\mathrm{s}\,x)\big)$: Wir definieren $\psi(y) :\equiv \mathrm{s}\,x = \mathrm{s}\,y$. Leiten Sie aus L_{11} (existential generalization) mit $\nu :\equiv y$, $\tau :\equiv x$, φ ersetzt durch ψ und aus L_{14} die Formel $\exists y \psi(y)$ her.
- Leiten Sie aus $\exists y \psi(y)$ und L_7 die Formel $\varphi(\mathrm{s}\,x)$ her.
- Leiten Sie aus $\varphi(\mathrm{s}\,x)$ und L_1 die Formel $\varphi(x) \to \varphi(\mathrm{s}\,x)$ her.
- Verallgemeinern Sie diese Formel. Leiten Sie aus der Induktionsverankerung, dem verallgemeinerten Induktionsschritt und L_5 die Formel $\varphi(x/0) \wedge \forall x\big(\varphi(x) \to \varphi(\mathrm{s}\,x)\big)$ her.
- Verwenden Sie jetzt PA_6.

3. (Gruppentheorie, Links- und Rechts-Inverse)

(a) Wir schreiben $\mathscr{L}_{\mathrm{GT}} = \{e, \circ\}$ für die Signatur der Gruppentheorie und GT für das Axiomensystem der Gruppentheorie. Was bedeutet die $\mathscr{L}_{\mathrm{GT}}$-Formel $\forall u \forall v\big(v \circ u = e \to u \circ v = e\big)$ intuitiv?

(b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathsf{GT} \vdash \forall u \forall v \big(v \circ u = e \to u \circ v = e\big) \tag{1}$$

Hinweise: Behauptungen:

$$\mathsf{GT},\, v \circ u = e \vdash w \circ v = e \to u \circ v = e \tag{2}$$

$$\mathsf{GT},\, \big(w \circ v = e \to u \circ v = e\big) \vdash u \circ v = e \tag{3}$$

Verwenden Sie (2,3), das DEDUKTIONSTHEOREM und zweimal Verallgemeinerung, um (1) zu zeigen.

Beweis der Behauptung (2)**:**

- Zeigen Sie:

$$\mathsf{GT},\, v \circ u = e \vdash v \circ (u \circ v) = v \tag{4}$$

  Verwenden und zeigen Sie dazu:

$$\mathsf{GT}_0 \vdash v \circ (u \circ v) = (v \circ u) \circ v$$

$$v \circ u = e \vdash (v \circ u = e) \wedge (v = v)$$

$$(v \circ u = e) \wedge (v = v) \vdash (v \circ u) \circ v = e \circ v \qquad \text{(Tipp: } \mathrm{L}_{16}\text{)}$$

$$\mathsf{GT}_1 \vdash e \circ v = v$$

$$\tau_0 = \tau_1,\, \tau_1 = \tau_2 \vdash \tau_0 = \tau_2 \tag{5}$$

  Bemerkung: (5) folgt aus der Lösung zu einer Aufgabe in Serie 2 (Gleichheitsrelation transitiv).

- Überlegen Sie sich, dass ein zum Beweis von (4) analoges Argument zeigt, dass gilt:

$$\mathsf{GT},\, w \circ v = e \vdash w \circ \big(v \circ (u \circ v)\big) = u \circ v \tag{6}$$

- Zeigen Sie:

$$v \circ (u \circ v) = v \vdash (w = w) \wedge \big(v \circ (u \circ v) = v\big) \tag{7}$$

$$(w = w) \wedge \big(v \circ (u \circ v) = v\big) \vdash w \circ \big(v \circ (u \circ v)\big) = w \circ v \tag{8}$$

  Schliessen Sie aus (4,7,8), dass gilt:

$$\mathsf{GT},\, v \circ u = e \vdash w \circ \big(v \circ (u \circ v)\big) = w \circ v$$

  Folgern Sie daraus mittels (6), der Tatsache $\tau_0 = \tau_1 \vdash \tau_1 = \tau_0$ und (5), dass

$$\mathsf{GT},\, v \circ u = e,\, w \circ v = e \vdash u \circ v = e.$$

  Folgern Sie daraus die Behauptung (2).

Beweis der Behauptung (3)**:**

- Leiten Sie aus $w \circ v = e \to u \circ v = e$ mittels Verallgemeinerung und L_{10} (universal instantiation) die Formel $y \circ v = e \to u \circ v = e$ her.
- Leiten Sie aus $y \circ v = e \to u \circ v = e$ mittels Verallgemeinerung, L_{13}, GT_2 und L_{10} (universal instantiation) die Formel $u \circ v = e$ her.

4. Mit einem *semi-formalen Beweis* meinen wir einen formalen Beweis, bei dem wir alle Schritte weggelassen haben, die auf logischen Axiomen beruhen. In einem solchen Beweis führen wir also nur die Schritte durch, die auf den nicht-logischen Axiomen beruhen. Wir verwenden in einem semi-formalen Beweis ausser logischen Symbolen auch die natürliche Sprache. Dabei verwenden wir einen eingeschränkten Wortschatz, der aus Wörtern und Ausdrücken mit präziser und eindeutiger Bedeutung besteht. Ein Beispiel für einen solchen Ausdruck ist *Wir nehmen an, dass* .... (Der Begriff eines *semi-formalen Beweises* ist kein präziser mathematischer Begriff.)

Zeigen Sie mit semi-formalen Beweisen, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) **(∗)** $\mathsf{PA} \vdash \forall x(\mathtt{0} + x = x)$
Hinweis: Verwenden Sie Induktion, d. h. PA_6.

(b) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z\big((x + y) + z = x + (y + z)\big)$
Was besagt diese Formel intuitiv?

(c) $\mathsf{PA} \vdash \forall x\big(\mathtt{s}\mathtt{0} + x = \mathtt{s}x \ \wedge \ \mathtt{s}x = x + \mathtt{s}\mathtt{0}\big)$

(d) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y(x + y = y + x)$
Was besagt diese Formel intuitiv?

5. Zeigen Sie mit semi-formalen Beweisen, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) $\mathsf{PA} \vdash \forall x(\mathtt{0} \cdot x = \mathtt{0})$

(b) $\mathsf{PA} \vdash \forall x\big(\mathtt{s}\mathtt{0} \cdot x = x \ \wedge \ x = x \cdot \mathtt{s}\mathtt{0}\big)$

(c) Was bedeuten die Formeln unten in **5**.d-**5**.g intuitiv?

(d) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z\big((x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)\big)$

(e) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$

(f) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z\big(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)\big)$

(g) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z\big(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\big)$