Serie 4

STRUKTUR, VARIABLENBELEGUNG, INTERPRETATION, MODELL EINER THEORIE

Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

0. ((∗) **Relation**) Relationen treten im Zusammenhang mit Modellen auf, da jede Struktur Relationssymbole auf Relationen abbildet. Wir definieren die binäre Relation $\leqslant$ auf $\mathbb{N} := \{\varepsilon, |, ||, |||, \dots\}$, der Menge der natürlichen Zahlen, als

$$\leqslant := \left\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\middle|\, \text{ES GIBT EIN } k \text{ IN } \mathbb{N}, \text{ SODASS } km \equiv n.\right\}.$$

(km ist die Verkettung von k und m.) Für jedes Paar $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ schreiben wir $m \leqslant n$ genau dann, falls $(m,n) \in \leqslant$. Zeigen Sie, dass $\leqslant$ folgende Eigenschaften besitzt:

(a) (Reflexivität) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \leqslant n$.

(b) (Transitivität) Für alle $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ implizieren $\ell \leqslant m$ und $m \leqslant n$, dass $\ell \leqslant n$.

(c) (Antisymmetrie) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ implizieren $m \leqslant n$ und $n \leqslant m$, dass $m \equiv n$.

Bemerkung: Sie dürfen Folgendes ohne Beweis verwenden:

(i) (Assoziativität der Verkettung) Verkettung von (ENDLICHEN) Zeichenketten ist assoziativ, d. h. für alle Zeichenketten u, v, w gilt $(uv)w \equiv u(vw)$.

(ii) (Injektivität des Hinzufügens) Rechtes Hinzufügen eines Symbols s zu einer Zeichenkette ist injektiv, d. h. für alle Zeichenketten v, w und jedes Symbol s impliziert $vs \equiv ws$, dass $v \equiv w$.

(iii) (Induktion[1]) Sei P eine Abbildung, die jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage $P(n)$ zuordnet, sodass $P(\varepsilon)$ gilt und für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $P(n)$ die Aussage $P(n|)$ impliziert. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $P(n)$.

Hinweis: Verwenden Sie für Antisymmetrie Induktion mit:

$P(m) :=$"Für jedes $p \in \mathbb{N}$ impliziert $pm \equiv m$, dass $p \equiv \varepsilon$."

Für den Induktionsschritt verwenden Sie (i,ii).

1. (**Struktur**) Erinnerung: Die Signaturen der Gruppen- und Ringtheorie und der Theorie der dichten linearen Ordnungen sind gegeben durch $\mathscr{L}_{\mathrm{GT}} = \{e, \circ\}$, $\mathscr{L}_{\mathrm{RT}} = \{0, 1, +, \cdot\}$, $\mathscr{L}_{\mathrm{DLO}} = \{<\}$.

(a) **(∗)** Seien $\boldsymbol{e}, \alpha, \beta$ verschiedene Objekte. Geben Sie eine $\mathscr{L}_{\mathrm{GT}}$-Struktur $(A, \mathbf{M})$ mit Bereich $A := \{\boldsymbol{e}, \alpha, \beta\}$ an.

---

[1] Dieses Prinzip wird auch *Meta-Induktion* genannt, um es vom Axiom PA_6 der Peano-Arithmetik zu unterscheiden.

(b) Seien $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ zwei verschiedene Objekte. Geben Sie eine $\mathscr{L}_{\mathrm{RT}}$-Struktur $(A, \mathbf{M})$ mit Bereich $A := \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ an.

(c) Seien α, β, γ verschiedene Objekte. Geben Sie eine $\mathscr{L}_{\mathrm{DLO}}$-Struktur $(A, \mathbf{M})$ mit Bereich $A := \{\alpha, \beta, \gamma\}$ an.

2. ((∗) **Variablenbelegung**, **Interpretation eines Terms**, **Gültigkeit einer Formel in einer Interpretation**, **Ringtheorie**) Betrachten Sie die $\mathscr{L}_{\mathrm{RT}}$-Struktur $(A, \mathbf{M})$, die Sie in **1**.b definiert haben. Wir definieren die Variablenbelegung $j : \{\text{Variable}\} \to A := \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ als die konstante Abbildung

$$j(\nu) :\equiv \mathbf{1}, \qquad \text{für jedes } \nu.$$

Wir betrachten die Interpretation $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$.

(a) Bestimmen Sie folgende Objekte:

$$\mathbf{I}(x+0) \qquad \mathbf{I}(x+y) \qquad \mathbf{I}(x \cdot 1) \qquad \mathbf{I}(x \cdot y)$$

Welche der folgenden Aussagen gelten? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) $\mathbf{I} \models x = 1$

(c) $\mathbf{I} \models x = 1 \wedge y = 0$

(d) $\mathbf{I} \models x = y$

(e) $\mathbf{I} \models \forall x(x = y)$

(f) $\mathbf{I} \models \forall x \forall y(x = y)$

(g) $\mathbf{I} \models \exists x(x = y)$

3. (**Variablenbelegung**, **Gültigkeit einer Formel in einer Interpretation**, **Theorie der dichten linearen Ordnungen**) Betrachten Sie die $\mathscr{L}_{\mathrm{DLO}}$-Struktur $(A, \mathbf{M})$, die Sie in **1**.c definiert haben. Wir definieren die Variablenbelegung $j : \{\text{Variable}\} \to A := \{\alpha, \beta\}$ als die Abbildung

$$j(\nu) :\equiv \begin{cases} \alpha, & \text{falls } \nu \equiv x, \\ \beta, & \text{falls } \nu \equiv y, \\ \gamma, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir betrachten die Interpretation $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Welche der folgenden Aussagen gelten? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\mathbf{I} \models x < y \qquad \mathbf{I} \models y < x \qquad \mathbf{I} \models \exists x \exists y(y < x)$$

4. (**Modell**) In dieser Aufgabe verwenden wir den Begriff eines Modells. Dieser ist wie folgt definiert. Sei $\mathscr{L}$ eine Signatur und $\mathbf{M} = (A, \mathbf{M})$ eine $\mathscr{L}$-Struktur.

DEFINITION 1 (Modell)
- *Sei φ eine $\mathscr{L}$-Formel. Wir nennen* $\mathbf{M}$ *ein* Modell von φ *g. d. w. für jede Variablenbelegung j in $\mathbf{M}$ gilt*

$$I := (\mathbf{M}, j) \models \varphi.$$

Wir schreiben:

$$\mathbf{M} \models \varphi \qquad :\Leftrightarrow \qquad \mathbf{M} \textit{ ist ein Modell von } \varphi.$$

- *Sei Φ eine Menge von $\mathscr{L}$-Formeln. Wir nennen* $\mathbf{M}$ *ein* Modell von Φ *g. d. w.* $\mathbf{M}$ *ein Modell jeder Formel in Φ ist. Wir schreiben:*

$$\mathbf{M} \models \Phi \qquad :\Leftrightarrow \qquad \mathbf{M} \textit{ ist ein Modell von } \Phi.$$

Seien $\boldsymbol{e}, \alpha, \beta$ verschiedene Objekte.

(a) ((∗) **Gruppentheorie**) Wir betrachten die Signatur der Gruppentheorie, $\mathscr{L} := \mathscr{L}_{\mathrm{GT}} = \{e, \circ\}$. Wir definieren den Bereich $A := \{\boldsymbol{e}, \alpha, \beta\}$ und die Abbildung $\circ : A^2 = A \times A \to A$ durch folgende Verknüpfungstabelle:

$\circ$	$\boldsymbol{e}$	α	β
$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{e}$	α	β
α	α	β	$\boldsymbol{e}$
β	β	$\boldsymbol{e}$	α

Wir definieren die Abbildung $\mathbf{M}$ auf $\mathscr{L}_{\mathrm{GT}}$ durch:

$$e^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{M}(e) :\equiv \boldsymbol{e} \qquad \circ^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{M}(\circ) :\equiv \circ$$

Zeigen Sie, dass $(A, \mathbf{M})$ ein Modell der Gruppentheorie ist.

Bemerkung: Für jede $\mathscr{L}_{\mathrm{GT}}$-Struktur $(A, \mathbf{M})$ gilt $\mathbf{M} \models \mathsf{GT}$ genau dann, wenn das Tripel $(A, e^{\mathbf{M}}, \circ^{\mathbf{M}})$ eine Gruppe ist. Das Tripel $(A, \boldsymbol{e}, \circ)$ aus dieser Aufgabe ist also eine Gruppe.

Hinweise:

- Zeigen Sie $\mathbf{M} \models \mathsf{GT}_i$ in der Reihenfolge $i = 1, 0, 2$.
- $\mathbf{M} \models \mathsf{GT}_1 :\equiv \forall x(e \circ x = x)$: Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren die Interpretation $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$.
  - Sei $a \in A$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{I}\,\frac{a}{x}(e \circ x) \equiv \mathbf{I}\,\frac{a}{x}(x)$. Verwenden Sie dazu, dass $\mathbf{I}\,\frac{a}{x}(e) \equiv e^{\mathbf{M}} \equiv \boldsymbol{e}$, sowie die $\boldsymbol{e}$-Zeile[2] der Verknüpfungstabelle.
  - Folgern Sie, dass $\mathbf{I} \models \forall x(e \circ x = x) \equiv \mathsf{GT}_1$.

  Bemerkung: $\mathbf{M} \models \forall x(e \circ x = x)$ ist äquivalent dazu, dass für jedes $a \in A$ gilt: $\boldsymbol{e} \circ a = a$, d. h., $\boldsymbol{e}$ ist links-neutral.
- $\mathbf{M} \models \mathsf{GT}_0 :\equiv \forall x \forall y \forall z\big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\big)$: Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Seien $a, b, c \in A$. Wir kürzen ab: $J := \big((\mathbf{I}\,\frac{a}{x})\frac{b}{y}\big)\frac{c}{z}$.
  - Zeigen Sie, dass
  $$J\big(x \circ (y \circ z)\big) \equiv J\big((x \circ y) \circ z\big). \tag{1}$$
  Verwenden Sie dazu Folgendes:
  $$J(z) \equiv c \qquad J(y) \equiv b \qquad J(x) \equiv a \tag{2}$$
  $$a \circ (b \circ c) \equiv (a \circ b) \circ c \qquad \text{für alle } a, b, c \in A \tag{3}$$
  Warum gelten die Identitäten (2)?
  Um (3) zu zeigen, können wir im Prinzip alle Tripel $(a, b, c) \in A^3$ durchgehen und die Verknüpfungstabelle benutzen. Es gibt $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ solche Tripel. Um den Beweis von (3) zu vereinfachen, tun Sie Folgendes: Verwenden Sie, dass $\circ$ in unserem Beispiel kommutativ ist. (Überprüfen Sie das mit Hilfe der Verknüpfungstabelle!) Betrachten Sie folgende Fälle:

[2] Für jedes Symbol s in der Kopfspalte (= Spalte ganz links) meinen wir mit *s-Zeile* die Zeile der Tabelle, welche die Kopfspalte in der Zelle mit dem Symbol s schneidet.

- $*$ (Mindestens) eines der drei Elemente a, b, c ist gleich $\boldsymbol{e}$.
- $*$ Keines der drei Elemente ist gleich $\boldsymbol{e}$: Unterfälle:
  $a \equiv c$
  $a \equiv b \not\equiv c$
  $a \not\equiv b \equiv c$: Verwenden Sie den Unterfall $a \equiv b \not\equiv c$.

– Folgern Sie aus (1), dass $\big((\mathbf{I}\,\frac{a}{x})\frac{b}{y}\big)\frac{c}{z} \models \big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\big)$.

– Folgern Sie daraus, dass $(\mathbf{I}\,\frac{a}{x})\frac{b}{y} \models \forall z\big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\big)$.

– Argumentieren Sie analog für die Quantoren $\forall y$ und $\forall x$.

(b) (**Gruppentheorie**) Finden Sie eine $\mathscr{L}_{\mathrm{GT}}$-Struktur $(A, \mathbf{M})$ mit Bereich $A := \{\boldsymbol{e}, \alpha\}$, sodass $\mathbf{M} \not\models \mathsf{GT}$.

(c) (**($*$) Theorie mit leerer Signatur**) Wir betrachten die leere Signatur $\mathscr{L} := \varnothing$ und die Theorie T gegeben durch folgendes Axiom:

$$x = y$$

i. Finden Sie ein Modell von T.

ii. Beschreiben Sie alle Modelle von T.

(d) (**Ringtheorie**) Seien $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ zwei verschiedene Objekte. Finden Sie ein Modell $(A, \mathbf{M})$ der Ringtheorie mit Bereich $A := \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Überlegen Sie sich, dass tatsächlich $\mathbf{M} \models \mathsf{RT}$ gilt.

Bemerkung: Für jede $\mathscr{L}_{\mathrm{RT}}$-Struktur $(A, \mathbf{M})$ gilt $\mathbf{M} \models \mathsf{RT}$ genau dann, wenn das Tupel $\big(A, 0^{\mathbf{M}}, 1^{\mathbf{M}}, +^{\mathbf{M}}, \cdot^{\mathbf{M}}\big)$ ein Ring ist. Das Tupel $\big(A, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\cdot}\big)$ aus dieser Aufgabe ist also ein Ring.

(e) (**Ringtheorie**) Finden Sie eine $\mathscr{L}_{\mathrm{RT}}$-Struktur $(A, \mathbf{M})$ mit Bereich $A := \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, sodass $\mathbf{M} \not\models \mathsf{RT}$.

(f) (**Teiltheorie von DLO**) Seien α, β, γ verschiedene Objekte. Finden Sie ein Modell $(A, \mathbf{M})$ der Theorie $\mathsf{T} := \big\{\mathsf{DLO}_0, \mathsf{DLO}_1, \mathsf{DLO}_2\big\}$ mit Bereich $A := \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

(g) (**Teiltheorie von DLO**) Finden Sie ein Modell $(A, \mathbf{M})$ der Theorie $\mathsf{T} := \big\{\mathsf{DLO}_0, \mathsf{DLO}_1, \mathsf{DLO}_2\big\}$ mit einem unendlichen Bereich.

Hinweis: Verwenden Sie eine andere Übungsaufgabe.

Bemerkung: Überlegen Sie sich grundsätzlich, dass Ihr gefundenes $(A, \mathbf{M})$ tatsächlich ein Modell von T ist. Es wird *nicht* erwartet, dass Sie das im Detail ausführen.

(h) (**Theorie der dichten linearen Ordnungen**) Finden Sie ein Modell $(A, \mathbf{M})$ der Theorie DLO der dichten linearen Ordnungen.

Hinweis: Definieren Sie A als eine gewisse Menge von Zahlen.

Bemerkung: Überlegen Sie sich, dass tatsächlich $\mathbf{M} \models \mathsf{DLO}$ gilt. Sie dürfen dabei grundlegende Eigenschaften von Zahlen verwenden.

(i) (**($*$) Peano-Arithmetik**) Wir definieren $(\mathbb{N}, \mathrm{N})$, das Standardmodell der Peano-Arithmetik, wie in der Vorlesung, wobei wir abweichend von der ursprünglichen Definition $\mathrm{s}^{\mathrm{N}}(n) :\equiv n|$ statt $|n$ definieren. (Dadurch vereinfacht sich diese Übungsaufgabe.) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, \mathrm{N})$ ein Modell der Peano-Arithmetik ist.

Bemerkungen:

- Sie dürfen $\mathbf{0}$.(i,ii,iii) ohne Beweis verwenden.

- Es wird *nicht* erwartet, dass Sie alle Details des Beweises von $\mathbb{N} \vDash \mathsf{PA}_6$ ausführen. Erklären Sie stattdessen in Worten, warum diese Aussage gilt.

(j) (**Körpertheorie**) Seien $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \alpha, \beta$ verschiedene Objekte. Wir definieren $A := \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \alpha, \beta\}$ und die Abbildungen $\mathbf{+}, \boldsymbol{\cdot} : A^2 \to A$ durch folgende Tabellen:

$\mathbf{+}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	α	β
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	α	β
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	β	α
α	α	β	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
β	β	α	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

$\boldsymbol{\cdot}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	α	β
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	α	β
α	$\mathbf{0}$	α	β	$\mathbf{1}$
β	$\mathbf{0}$	β	$\mathbf{1}$	α

Wir definieren die Abbildung $\mathbf{M}$ auf $\mathscr{L}_{\mathrm{KT}} = \{0, 1, +, \cdot\}$, der Signatur der Körpertheorie, durch:

$$0^{\mathbf{M}} :\equiv \mathbf{M}(0) :\equiv \mathbf{0} \qquad 1^{\mathbf{M}} :\equiv \mathbf{M}(1) :\equiv \mathbf{1} \qquad +^{\mathbf{M}} :\equiv \mathbf{M}(+) :\equiv \mathbf{+} \qquad \cdot^{\mathbf{M}} :\equiv \mathbf{M}(\cdot) :\equiv \boldsymbol{\cdot}$$

Zeigen Sie, dass $(A, \mathbf{M})$ ein Modell von KT ist.

Bemerkungen: Für jede $\mathscr{L}_{\mathrm{KT}}$-Struktur $(A, \mathbf{M})$ gilt $\mathbf{M} \vDash \mathsf{KT}$ genau dann, wenn das Tupel $(A, 0^{\mathbf{M}}, 1^{\mathbf{M}}, +^{\mathbf{M}}, \cdot^{\mathbf{M}})$ ein Körper ist. Das Tupel $(A, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{+}, \boldsymbol{\cdot})$ aus dieser Aufgabe ist also ein Körper.

Hinweise:

- Zeigen Sie $\mathbf{M} \vDash \mathsf{KT}_i$ in der Reihenfolge $i = 9, 2, 1, 3, 5, 6, 7, 0, 4, 8$. ($i = 0, 4, 8$ sind aufwendig.)
- $\mathbf{M} \vDash \mathsf{KT}_9 \equiv 0 \neq 1$: Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren die Interpretation $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Zeigen Sie, dass *nicht* $\mathbf{I}(0) \equiv \mathbf{I}(1)$. Folgern Sie daraus, dass $\mathbf{I} \vDash \neg(0 = 1)$.

  Bemerkung: $\mathbf{M} \vDash 0 \neq 1$ ist äquivalent dazu, dass $\mathbf{0} \not\equiv \mathbf{1}$.
- $\mathbf{M} \vDash \mathsf{KT}_2 \equiv \forall x(0 + x = x)$ (Links-Neutralität der Null bzgl. Addition): Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$.
  - Sei $a \in A$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{I}\,\frac{a}{x}(0 + x) \equiv \mathbf{I}\,\frac{a}{x}(x)$. Verwenden Sie dazu, dass $\mathbf{I}\,\frac{a}{x}(0) \equiv 0^{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{0}$, sowie die $\mathbf{0}$-Zeile der Additionstabelle.
  - Folgern Sie, dass $\mathbf{I} \vDash \forall x(0 + x = x) \equiv \mathsf{KT}_2$.

  Bemerkung: $\mathbf{M} \vDash \forall x(0 + x = x)$ ist äquivalent dazu, dass für jedes $a \in A$ gilt: $\mathbf{0} \mathbf{+} a = a$, d. h., $\mathbf{0}$ ist links-neutral.
- $\mathbf{M} \vDash \mathsf{KT}_1 \equiv \forall y\big(x + y = y + x\big)$ (Kommutativität der Addition): Sei j eine Variablenbelegung in $\mathbf{M}$. Wir definieren $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Seien $a, b \in A$. Wir kürzen ab: $J := (\mathbf{I}\,\frac{a}{x})\frac{b}{y}$.
  - Zeigen Sie, dass
  $$J(x + y) \equiv J(y + x). \tag{4}$$
    Verwenden Sie dazu Folgendes:
    $J(y) \equiv b$, $J(x) \equiv a$ (Warum?)
    Die Additionstabelle ist symmetrisch bzgl. Spiegelung an der (nach rechts unten zeigenden) Diagonale.
  - Folgern Sie aus (4), dass $(\mathbf{I}\,\frac{a}{x})\frac{b}{y} \vDash \big(x + y = y + x\big)$.
  - Folgern Sie daraus, dass $\mathbf{I}\,\frac{a}{x} \vDash \forall y\big(x + y = y + x\big)$.

- Zeigen Sie $\mathbf{M} \models \mathsf{KT}_i$ für die übrigen i auf eine analoge Weise mit Hilfe der Additions- und Multiplikationstabellen.
- $\mathbf{M} \models \mathsf{KT}_0 \equiv \forall x \forall y \forall z\big(x + (y + z) = (x + y) + z\big)$ (Assoziativität der Addition): Seien $a, b, c \in A$. Um $a + (b + c) \equiv (a + b) + c$ zu zeigen, können wir im Prinzip alle Tripel $(a, b, c) \in A^3$ durchgehen. Davon gibt es $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Um den Beweis zu vereinfachen, tun Sie Folgendes: Verwenden Sie, dass Addition kommutativ ist. Betrachten Sie folgende Fälle:
  - (Mindestens) eines der drei Elemente a, b, c ist gleich $\mathbf{0}$.
  - Keines der drei Elemente ist gleich $\mathbf{0}$: Unterfälle:
    $a \equiv c$:
    $a \equiv b \not\equiv c$
    $a \not\equiv b \equiv c$: Verwenden Sie den Unterfall $a \equiv b \not\equiv c$.
    a, b, c sind alle verschieden
- $\mathbf{M} \models \mathsf{KT}_4 \equiv \forall x \forall y \forall z\big(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\big)$ (Assoziativität der Multiplikation): Seien $a, b, c \in A$. Verwenden Sie, dass Multiplikation kommutativ ist. Betrachten Sie folgende Fälle:
  - Eines der drei Elemente a, b, c ist gleich $\mathbf{0}$.
  - Eines der drei Elemente ist gleich $\mathbf{1}$.
  - Keines der drei Elemente ist gleich $\mathbf{0}$ oder $\mathbf{1}$: Unterfälle:
    $a \equiv c$
    $a \equiv b \not\equiv c$
    $a \not\equiv b \equiv c$: Verwenden Sie den Unterfall $a \equiv b \not\equiv c$.

5. (**Existenz eines Rechts-Inversen impliziert nicht Existenz eines Links-Inversen.**) Wir betrachten die Signatur $\mathscr{L}_{\mathsf{GT}} := \{e, \circ\}$ und die Axiome:

$$\begin{aligned} \mathsf{GT}_0 &\equiv \forall x \forall y \forall z\big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\big) \\ \mathsf{GT}_1 &\equiv \forall x (e \circ x = x) \\ \sigma : &\equiv \forall x \exists y (x \circ y = e) \end{aligned}$$

(GT_0 und GT_1 sind Axiome der Gruppentheorie.) Wir definieren die Theorie $\mathsf{T} := \{\mathsf{GT}_0, \mathsf{GT}_1, \sigma\}$.

Bemerkungen:

- Intuitiv besagt σ, dass jedes Objekt x ein *Rechts*inverses besitzt.
- Es gilt $\sigma \not\equiv \mathsf{GT}_2 \equiv \forall x \exists y (y \circ x = e)$. Intuitiv besagt das Axiom GT_2, dass jedes Objekt x ein *Links*inverses besitzt.

Seien $\boldsymbol{e}$ und α zwei Objekte. Wir definieren $A := \{\boldsymbol{e}, \alpha\}$ und die Funktion $\mathsf{o} : A^2 \to A$ durch

$$a \,\mathsf{o}\, b :\equiv \mathsf{o}(a, b) :\equiv b, \qquad \text{für alle } a, b \in A.$$

Wir definieren die Abbildung $\mathbf{M}$ auf $\mathscr{L}_{\mathsf{GT}}$ durch

$$e^{\mathbf{M}} :\equiv \mathbf{M}(e) :\equiv \boldsymbol{e}, \qquad \circ^{\mathbf{M}} :\equiv \mathbf{M}(\circ) :\equiv \mathsf{o}.$$

Das Paar $\mathbf{M} := (A, \mathbf{M})$ ist eine $\mathscr{L}_{\mathsf{GT}}$-Struktur.

(a) Zeigen Sie: $\mathrm{M} \models \mathsf{T}$

(b) Zeigen Sie: $\mathrm{M} \not\models \mathsf{GT}_2$

Bemerkungen:

- Für jedes Modell G der Gruppentheorie GT gilt, dass $G \models \sigma$. (Das folgt daraus, dass G eine Gruppe ist und darum in G jedes Linksinverse ein Rechtsinverses ist.) Aus dem Gödelschen Vollständigkeitssatz folgt daher, dass $\mathsf{GT} \vdash \sigma$ und daher

  $$\mathsf{GT} \vdash \mathsf{T},$$

  d. h., die Gruppentheorie beweist T.

- Gemäss (a,b) ist M ein Modell von T, aber kein Modell von GT_2. Aus der Kontraposition des Korrektheitssatzes folgt daher, dass $\mathsf{T} \nvdash \mathsf{GT}_2$ und daher

  $$\mathsf{T} \nvdash \mathsf{GT},$$

  d. h., die Theorie T beweist die Gruppentheorie. (Wir werden den Korrektheitssatz nächste Woche in der Vorlesung behandeln.)

- Falls wir in T das Axiom GT_1 durch das Axiom e *ist (links- und rechts-)neutral* ersetzen, dann beweist die abgeänderte Theorie die Gruppentheorie. Genauer gesagt betrachten wir das Axiom

  $$\tau :\equiv \forall x\big(e \circ x = x \wedge x \circ e = x\big).$$

  Es gilt:

  $$\widetilde{\mathsf{T}} := \big\{\mathsf{GT}_0, \tau, \sigma\big\} \vdash \mathsf{GT}$$

  Für jedes Modell M von $\widetilde{\mathsf{T}}$ gilt nämlich $\mathrm{M} \models \{\mathsf{GT}_1, \mathsf{GT}_2\}$ und daher $\mathrm{M} \models \mathsf{GT}$. (Überlegen Sie sich das!) Aus dem Gödelschen Vollständigkeitssatz folgt daher, dass $\widetilde{\mathsf{T}} \vdash \mathsf{GT}$, wie behauptet.