

Serie 5

STRUKTUR, VARIABLENBELEGUNG, INTERPRETATION, MODELL EINER THEORIE

Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (*) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

0. (**Modell**) Seien e, α, β verschiedene Objekte.

- (a) (**(*) Gruppentheorie**) Wir betrachten die Signatur der Gruppentheorie, $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{GT} = \{e, \circ\}$. Wir definieren den Bereich $A := \{e, \alpha, \beta\}$ und die Abbildung $\circ : A^2 = A \times A \rightarrow A$ durch folgende Verknüpfungstabelle:

$\circ$	e	α	β
e	e	α	β
α	α	β	e
β	β	e	α

Wir definieren die Abbildung M auf $\mathcal{L}_{GT}$ durch:

$$e^M \equiv M(e) := e \quad \circ^M \equiv M(\circ) := \circ$$

Zeigen Sie, dass (A, M) ein Modell der Gruppentheorie ist.

Bemerkung: Für jede $\mathcal{L}_{GT}$ -Struktur (A, M) gilt $M \models GT$ genau dann, wenn das Tripel $(A, e^M, \circ^M)$ eine Gruppe ist. Das Tripel $(A, e, \circ)$ aus dieser Aufgabe ist also eine Gruppe.

Hinweise:

- Zeigen Sie $M \models GT_i$ in der Reihenfolge $i = 1, 0, 2$.
- $M \models GT_1 := \forall x(e \circ x = x)$: Sei j eine Variablenbelegung in M . Wir definieren die Interpretation $I := (M, j)$.
 - Sei $a \in A$. Zeigen Sie, dass $I \stackrel{a}{x}(e \circ x) \equiv I \stackrel{a}{x}(x)$. Verwenden Sie dazu, dass $I \stackrel{a}{x}(e) \equiv e^M \equiv e$, sowie die e -Zeile¹ der Verknüpfungstabelle.
 - Folgern Sie, dass $I \models \forall x(e \circ x = x) \equiv GT_1$.

Bemerkung: $M \models \forall x(e \circ x = x)$ ist äquivalent dazu, dass für jedes $a \in A$ gilt: $e \circ a = a$, d. h., e ist links-neutral.

- $M \models GT_0 := \forall x \forall y \forall z (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$: Sei j eine Variablenbelegung in M . Wir definieren $I := (M, j)$. Seien $a, b, c \in A$. Wir kürzen ab: $J := ((I \stackrel{a}{x}) \stackrel{b}{y}) \stackrel{c}{z}$.
 - Zeigen Sie, dass

$$J(x \circ (y \circ z)) \equiv J((x \circ y) \circ z). \quad (1)$$

Verwenden Sie dazu Folgendes:

$$J(z) \equiv c \quad J(y) \equiv b \quad J(x) \equiv a \quad (2)$$

$$a \circ (b \circ c) \equiv (a \circ b) \circ c \quad \text{für alle } a, b, c \in A \quad (3)$$

¹Für jedes Symbol s in der Kopfspalte (= Spalte ganz links) meinen wir mit s -Zeile die Zeile der Tabelle, welche die Kopfspalte in der Zelle mit dem Symbol s schneidet.

Warum gelten die Identitäten (2)?

Um (3) zu zeigen, können wir im Prinzip alle Tripel $(a, b, c) \in A^3$ durchgehen und die Verknüpfungstabelle benutzen. Es gibt $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ solche Tripel. Um den Beweis von (3) zu vereinfachen, tun Sie Folgendes: Verwenden Sie, dass $\circ$ in unserem Beispiel kommutativ ist. (Überprüfen Sie das mit Hilfe der Verknüpfungstabelle!) Betrachten Sie folgende Fälle:

* (Mindestens) eines der drei Elemente a, b, c ist gleich e .

* Keines der drei Elemente ist gleich e : Unterfälle:

$$a \equiv c$$

$$a \equiv b \neq c$$

$$a \neq b \equiv c: \text{ Verwenden Sie den Unterfall } a \equiv b \neq c.$$

- Folgern Sie aus (1), dass $((\mathbf{I} \frac{a}{x} \frac{b}{y}) \frac{c}{z}) \models (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$.
- Folgern Sie daraus, dass $(\mathbf{I} \frac{a}{x} \frac{b}{y}) \models \forall z (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$.
- Argumentieren Sie analog für die Quantoren $\forall y$ und $\forall x$.

(b) (**Gruppentheorie**) Finden Sie eine $\mathcal{L}_{\text{GT}}$ -Struktur $(A, \mathbf{M})$ mit Bereich $A := \{e, \alpha\}$, sodass $\mathbf{M} \models \text{GT}$.

(c) (**(*) Theorie mit leerer Signatur**) Wir betrachten die leere Signatur $\mathcal{L} := \emptyset$ und die Theorie $\mathbf{T}$ gegeben durch folgendes Axiom:

$$x = y$$

- i. Finden Sie ein Modell von $\mathbf{T}$.
- ii. Beschreiben Sie alle Modelle von $\mathbf{T}$.

(d) (**Ringtheorie**) Seien 0 und 1 zwei verschiedene Objekte. Finden Sie ein Modell $(A, \mathbf{M})$ der Ringtheorie mit Bereich $A := \{0, 1\}$. Überlegen Sie sich, dass tatsächlich $\mathbf{M} \models \text{RT}$ gilt.

Bemerkung: Für jede $\mathcal{L}_{\text{RT}}$ -Struktur $(A, \mathbf{M})$ gilt $\mathbf{M} \models \text{RT}$ genau dann, wenn das Tupel $(A, 0^{\mathbf{M}}, 1^{\mathbf{M}}, +^{\mathbf{M}}, \cdot^{\mathbf{M}})$ ein Ring ist. Das Tupel $(A, 0, 1, +, \cdot)$ aus dieser Aufgabe ist also ein Ring.

(e) (**Ringtheorie**) Finden Sie eine $\mathcal{L}_{\text{RT}}$ -Struktur $(A, \mathbf{M})$ mit Bereich $A := \{0, 1\}$, sodass $\mathbf{M} \not\models \text{RT}$.

(f) (**Teiltheorie von DLO**) Seien α, β, γ verschiedene Objekte. Finden Sie ein Modell $(A, \mathbf{M})$ der Theorie $\mathbf{T} := \{\text{DLO}_0, \text{DLO}_1, \text{DLO}_2\}$ mit Bereich $A := \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

(g) (**Teiltheorie von DLO**) Finden Sie ein Modell $(A, \mathbf{M})$ der Theorie $\mathbf{T} := \{\text{DLO}_0, \text{DLO}_1, \text{DLO}_2\}$ mit einem unendlichen Bereich.

Hinweis: Verwenden Sie eine andere Übungsaufgabe.

Bemerkung: Überlegen Sie sich grundsätzlich, dass Ihr gefundenes $(A, \mathbf{M})$ tatsächlich ein Modell von $\mathbf{T}$ ist. Es wird *nicht* erwartet, dass Sie das im Detail ausführen.

(h) (**Theorie der dichten linearen Ordnungen**) Finden Sie ein Modell $(A, \mathbf{M})$ der Theorie DLO der dichten linearen Ordnungen.

Hinweis: Definieren Sie A als eine gewisse Menge von Zahlen.

Bemerkung: Überlegen Sie sich, dass tatsächlich $M \models \text{DLO}$ gilt. Sie dürfen dabei grundlegende Eigenschaften von Zahlen verwenden.

- (i) **(*) Peano-Arithmetik** Wir definieren $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, das Standardmodell der Peano-Arithmetik, wie in der Vorlesung, wobei wir abweichend von der ursprünglichen Definition $s^{\mathbb{N}}(n) := n|$ statt $|n$ definieren. (Dadurch vereinfacht sich diese Übungsaufgabe.) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ ein Modell der Peano-Arithmetik ist.

Bemerkungen:

- Sie dürfen $0, (i, ii, iii)$ ohne Beweis verwenden.
 - Es wird *nicht* erwartet, dass Sie alle Details des Beweises von $\mathbb{N} \models \text{PA}_6$ ausführen. Erklären Sie stattdessen in Worten, warum diese Aussage gilt.
- (j) **(Körpertheorie)** Seien $0, 1, \alpha, \beta$ verschiedene Objekte. Wir definieren $A := \{0, 1, \alpha, \beta\}$ und die Abbildungen $+, \cdot : A^2 \rightarrow A$ durch folgende Tabellen:

$+$	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

$\cdot$	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

Wir definieren die Abbildung M auf $\mathcal{L}_{KT} = \{0, 1, +, \cdot\}$, der Signatur der Körpertheorie, durch:

$$0^M := M(0) := 0 \quad 1^M := M(1) := 1 \quad +^M := M(+) := + \quad \cdot^M := M(\cdot) := \cdot$$

Zeigen Sie, dass (A, M) ein Modell von KT ist.

Bemerkungen: Für jede $\mathcal{L}_{KT}$ -Struktur (A, M) gilt $M \models KT$ genau dann, wenn das Tupel $(A, 0^M, 1^M, +^M, \cdot^M)$ ein Körper ist. Das Tupel $(A, 0, 1, +, \cdot)$ aus dieser Aufgabe ist also ein Körper.

Hinweise:

- Zeigen Sie $M \models KT_i$ in der Reihenfolge $i = 9, 2, 1, 3, 5, 6, 7, 0, 4, 8$. ($i = 0, 4, 8$ sind aufwendig.)
- $M \models KT_9 \equiv 0 \neq 1$: Sei j eine Variablenbelegung in M . Wir definieren die Interpretation $I := (M, j)$. Zeigen Sie, dass *nicht* $I(0) \equiv I(1)$. Folgern Sie daraus, dass $I \models \neg(0 = 1)$.

Bemerkung: $M \models 0 \neq 1$ ist äquivalent dazu, dass $0 \neq 1$.

- $M \models KT_2 \equiv \forall x(0 + x = x)$ (Links-Neutralität der Null bzgl. Addition): Sei j eine Variablenbelegung in M . Wir definieren $I := (M, j)$.
 - Sei $a \in A$. Zeigen Sie, dass $I \stackrel{a}{x}(0 + x) \equiv I \stackrel{a}{x}(x)$. Verwenden Sie dazu, dass $I \stackrel{a}{x}(0) \equiv 0^M \equiv 0$, sowie die 0-Zeile der Additionstabelle.
 - Folgern Sie, dass $I \models \forall x(0 + x = x) \equiv KT_2$.

Bemerkung: $M \models \forall x(0 + x = x)$ ist äquivalent dazu, dass für jedes $a \in A$ gilt: $0 + a = a$, d. h., 0 ist links-neutral.

- $M \models KT_1 \equiv \forall y(x + y = y + x)$ (Kommutativität der Addition): Sei j eine Variablenbelegung in M . Wir definieren $I := (M, j)$. Seien $a, b \in A$. Wir kürzen ab: $J := (I \stackrel{a}{x}) \stackrel{b}{y}$.

- Zeigen Sie, dass

$$J(x + y) \equiv J(y + x). \quad (4)$$

Verwenden Sie dazu Folgendes:

$J(y) \equiv b, J(x) \equiv a$ (Warum?)

Die Additionstabelle ist symmetrisch bzgl. Spiegelung an der (nach rechts unten zeigenden) Diagonale.

- Folgern Sie aus (4), dass $(\mathbf{I} \frac{a}{x}) \frac{b}{y} \models (x + y = y + x)$.
- Folgern Sie daraus, dass $\mathbf{I} \frac{a}{x} \models \forall y (x + y = y + x)$.
- Zeigen Sie $\mathbf{M} \models \mathbf{KT}_i$ für die übrigen i auf eine analoge Weise mit Hilfe der Additions- und Multiplikationstabellen.
- $\mathbf{M} \models \mathbf{KT}_0 \equiv \forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z)$ (Assoziativität der Addition): Seien $a, b, c \in A$. Um $a + (b + c) \equiv (a + b) + c$ zu zeigen, können wir im Prinzip alle Tripel $(a, b, c) \in A^3$ durchgehen. Davon gibt es $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Um den Beweis zu vereinfachen, tun Sie Folgendes: Verwenden Sie, dass Addition kommutativ ist. Betrachten Sie folgende Fälle:
 - (Mindestens) eines der drei Elemente a, b, c ist gleich 0.
 - Keines der drei Elemente ist gleich 0: Unterfälle:
 - $a \equiv c$:
 - $a \equiv b \neq c$
 - $a \neq b \equiv c$: Verwenden Sie den Unterfall $a \equiv b \neq c$.
 - a, b, c sind alle verschieden
- $\mathbf{M} \models \mathbf{KT}_4 \equiv \forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$ (Assoziativität der Multiplikation): Seien $a, b, c \in A$. Verwenden Sie, dass Multiplikation kommutativ ist. Betrachten Sie folgende Fälle:
 - Eines der drei Elemente a, b, c ist gleich 0.
 - Eines der drei Elemente ist gleich 1.
 - Keines der drei Elemente ist gleich 0 oder 1: Unterfälle:
 - $a \equiv c$
 - $a \equiv b \neq c$
 - $a \neq b \equiv c$: Verwenden Sie den Unterfall $a \equiv b \neq c$.

1. (**semantischer Beweis, GÖDELSCHER VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ**) Seien $\mathcal{L}$ eine Signatur, $\mathbf{T}$ eine Menge von $\mathcal{L}$ -Sätzen und σ ein $\mathcal{L}$ -Satz. Ein *semantischer Beweis* der Aussage $\mathbf{T} \vdash \sigma$ ist ein Beweis dieser Aussage mittels des GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZES. Dazu zeigen wir, dass σ in jedem Modell von $\mathbf{T}$ wahr ist.

- (a) **(*)** $(1 + 1 = 2)$ Zeigen Sie das Folgende mittels eines semantischen Beweises:

$$\mathbf{PA} \vdash s0 + s0 = ss0 \quad (5)$$

Hinweis: Gehen Sie ähnlich wie im Beweis einer PROPOSITION in der Vorlesung (Linksinverses in Gruppe ist Rechtsinverses) vor:

Sei $(A, \mathbf{M})$ ein Modell von $\mathbf{PA}$. Sei j eine Variablenbelegung in A . Wir definieren $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Wir schreiben:

$$0 \equiv 0^{\mathbf{M}} \quad s \equiv s^{\mathbf{M}} \quad + \equiv +^{\mathbf{M}} \quad J := (\mathbf{I} \frac{s(0)}{x}) \frac{0}{y} \quad (6)$$

- i. Schreiben Sie $J(x + sy)$ mittels $0, s, +$ aus.
- ii. Verwenden Sie unsere Annahme $\mathbf{I} \models \mathbf{PA}_i$ für ein bestimmtes $i \in \{0, \dots, 6\}$, um zu zeigen, dass

$$J(x + sy) \equiv s(s(0) + 0). \quad (7)$$

Verwenden Sie unsere Annahme $\mathbf{I} \models \mathbf{PA}_i$ für ein bestimmtes $i \in \{0, \dots, 6\}$, um zu zeigen, dass

$$s(0) + 0 \equiv s(0). \quad (8)$$

- iii. Folgern Sie aus 1.(a)i, (7,8), dass

$$s(0) + s(0) \equiv s(s(0)).$$

- iv. Folgern Sie daraus, dass $\mathbf{M} \models s0 + s0 = ss0$.
- v. Verwenden Sie ein KOROLLAR zum GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ.
- (b) Vergleichen Sie Ihren Beweis mit dem *formalen* Beweis von (5), den Sie in Übungsserie 3 durchgeführt haben. Welcher Beweis erscheint Ihnen intuitiver und einfacher?
- (c) Zeigen Sie mittels eines semantischen Beweises, dass gilt:

$$\mathbf{PA} \vdash \forall x(0 + x = 0) \quad (9)$$

Hinweis: Gehen Sie ähnlich wie in Aufgabe 1.a vor:

Sei $(A, \mathbf{M})$ ein Modell von $\mathbf{PA}$. Sei j eine Variablenbelegung in A . Wir definieren $\mathbf{I} := (\mathbf{M}, j)$. Wir betrachten die $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$ -Formel

$$\varphi := 0 + x = x.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbf{I} \models \varphi(x/0) \quad (10)$$

$$\text{Für jedes } a \in A \text{ gilt: } \mathbf{I} \stackrel{a}{x} \models \varphi \Rightarrow \mathbf{I} \stackrel{a}{x} \models \varphi(x/sx). \quad (11)$$

Hinweis für (10): Verwenden Sie unsere Annahme $\mathbf{I} \models \mathbf{PA}_i$ für ein bestimmtes $i \in \{0, \dots, 6\}$.

Hinweise für (11):

- Nehmen Sie an, dass $\mathbf{I} \stackrel{a}{x} \models \varphi$ gilt.
- Schreiben Sie $\mathbf{I} \stackrel{a}{x} \models \varphi$ und $\mathbf{I} \stackrel{a}{x} \models \varphi(x/sx)$ mittels $0, s, +$ aus.
- Verwenden Sie unsere Annahme $\mathbf{I} \models \mathbf{PA}_3$, um den Ausdruck $0 + s(a)$ umzuschreiben.
- Verwenden Sie das ausgeschriebene $\mathbf{I} \stackrel{a}{x} \models \varphi$.
- Folgern Sie, dass $\mathbf{I} \stackrel{a}{x} \models \varphi(x/sx)$ gilt.

Verwenden Sie (10,11) und unsere Annahme $\mathbf{I} \models \mathbf{PA}_6$, um zu zeigen, dass $\mathbf{I} \models \forall x \varphi$ gilt.

Wie erhalten wir jetzt (9)?

- (d) Vergleichen Sie Ihren Beweis mit dem *formalen* Beweis von (9), den wir in der Vorlesung durchgeführt haben. Welcher Beweis erscheint Ihnen intuitiver und einfacher?

2. (*) (**Konsistenz einer Theorie, Existenz eines Modells, KORREKTHEITSSATZ, GÖDELSCHER VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ**) Sei $\mathcal{L}$ eine Signatur und Φ eine Menge von $\mathcal{L}$ -Formeln. Wir nennen Φ *inkonsistent* g. d. w. es eine $\mathcal{L}$ -Formel φ gibt, sodass gilt:

$$\Phi \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$$

Andernfalls nennen wir Φ *konsistent*. Sei jetzt T eine Menge von $\mathcal{L}$ -Sätzen. Zeigen Sie, dass gilt:

$$T \text{ ist genau dann konsistent, wenn es ein Modell besitzt.} \quad (12)$$

Hinweise zu “ $\Leftarrow$ ”: Wir nehmen an, dass T ein Modell (A, M) besitzt. Sei φ eine Formel.

- Zeigen Sie, dass gilt:

$$M \models \varphi \wedge \neg\varphi$$

Wählen Sie dazu eine Variablenbelegung j in A .

- Verwenden Sie den KORREKTHEITSSATZ.

Hinweise zu “ $\Rightarrow$ ”: Wir nehmen an, dass T konsistent ist. Wir definieren $\sigma := \neg\forall x(x = x)$.

Behauptung:

$$T \not\models \sigma \quad (13)$$

Hinweise zum Beweis dieser Behauptung:

- Zeigen Sie, dass gilt: $\vdash \forall x(x = x)$
- Nehmen Sie widerspruchswise an, dass $T \vdash \sigma$. Kombinieren Sie das mit 2.a und einer Aufgabe aus Übungsserie 2 (Konjunktion, Existenz), um zu zeigen, dass T einen Widerspruch beweist.

Aus (13) folgt, dass T ein Modell besitzt. Wie?

3. (**Existenz eines Rechts-Inversen impliziert nicht Existenz eines Links-Inversen.**) Wir betrachten die Signatur $\mathcal{L}_{GT} := \{e, \circ\}$ und die Axiome:

$$GT_0 \equiv \forall x \forall y \forall z (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$$

$$GT_1 \equiv \forall x (e \circ x = x)$$

$$\sigma : \equiv \forall x \exists y (x \circ y = e)$$

(GT_0 und GT_1 sind Axiome der Gruppentheorie.) Wir definieren die Theorie $T := \{GT_0, GT_1, \sigma\}$.

Bemerkungen:

- Intuitiv besagt σ , dass jedes Objekt x ein *Rechtsinverses* besitzt.
- Es gilt $\sigma \not\models GT_2 \equiv \forall x \exists y (y \circ x = e)$. Intuitiv besagt das Axiom GT_2 , dass jedes Objekt x ein *Links*inverses besitzt.

Seien e und α zwei Objekte. Wir definieren $A := \{e, \alpha\}$ und die Funktion $\circ : A^2 \rightarrow A$ durch

$$a \circ b := \circ(a, b) := b, \quad \text{für alle } a, b \in A.$$

Wir definieren die Abbildung M auf $\mathcal{L}_{GT}$ durch

$$e^M := M(e) := e, \quad \circ^M := M(\circ) := \circ.$$

Das Paar $M := (A, M)$ ist eine $\mathcal{L}_{GT}$ -Struktur.

- (a) Zeigen Sie: $M \models T$
- (b) Zeigen Sie: $M \not\models GT_2$

Bemerkungen:

- Für jedes Modell G der Gruppentheorie GT gilt, dass $G \models \sigma$. (Das folgt daraus, dass G eine Gruppe ist und darum in G jedes Linksinverse ein Rechtsinverses ist.) Aus dem GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ folgt daher, dass $GT \vdash \sigma$ und daher

$$GT \vdash T,$$

d. h., die Gruppentheorie beweist T .

- Gemäss (a,b) ist M ein Modell von T , aber kein Modell von GT_2 . Aus der Kontraposition des KORREKTHEITSSATZES folgt daher, dass $T \not\models GT_2$ und daher

$$T \not\models GT,$$

d. h., die Theorie T beweist die Gruppentheorie.

- Falls wir in T das Axiom GT_1 durch das Axiom e ist (links- und rechts-)neutral ersetzen, dann beweist die abgeänderte Theorie die Gruppentheorie. Genauer gesagt betrachten wir das Axiom

$$\tau := \forall x (e \circ x = x \wedge x \circ e = x).$$

Es gilt:

$$\tilde{T} := \{GT_0, \tau, \sigma\} \vdash GT$$

Für jedes Modell M von $\tilde{T}$ gilt nämlich $M \models \{GT_1, GT_2\}$ und daher $M \models GT$. (Überlegen Sie sich das!) Aus dem GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ folgt daher, dass $\tilde{T} \vdash GT$, wie behauptet.