Serie 6

Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (∗) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

0. **(∗) (leere Menge)** Wir betrachten die Signatur $\mathscr{L}_{\mathrm{ZF}} = \{\in\}$. Zeigen Sie, dass aus dem Extensionalitätsaxiom ZF_1 folgt, dass die leere Menge eindeutig ist, d. h.:

$$\mathsf{ZF}_1 \vdash \forall x \forall y \Big(\forall z (z \notin x) \wedge \forall z (z \notin y) \to x = y \Big) \tag{1}$$

Hinweise:

- Zeigen Sie das mittels eines semantischen Beweises wie folgt. Sei $(A, \mathbf{M}) \vDash \mathsf{T} := \{\mathsf{ZF}_1\}$ ein Modell. Wir schreiben:
$$\boldsymbol{\in} :\equiv \in^{\mathbf{M}}$$
Seien $a, b \in A$ so, dass gilt:

  Für jedes c in A gilt nicht $c \boldsymbol{\in} a$ und für jedes c in A gilt nicht $c \boldsymbol{\in} b$.
- Überlegen Sie sich, dass gilt:

  Für jedes c in A gilt: $c \boldsymbol{\in} a$ genau dann, wenn $c \boldsymbol{\in} b$
- Verwenden Sie ZF_1.

1. **(Kuratowskis Definition eines geordneten Paares)** Wir definieren das 2-stellige Funktionssymbol $\{\}$ durch den Satz

$$\sigma_{\{\}} :\equiv \forall x \forall y \forall z \Big(z \in \{\}xy \leftrightarrow \big(z = x \vee z = y \big) \Big). \tag{2}$$

Für die bessere Lesbarkeit schreiben wir

$$\{x, y\}$$

für $\{\}xy$. Wir definieren das einstellige Funktionssymbol $\{\}_1$ durch den Satz

$$\forall x \big(\{\}_1 x = \{x, x\} \big). \tag{3}$$

Für die bessere Lesbarkeit schreiben wir

$$\{x\}$$

für $\{\}_1 x$. Wir definieren das 2-stellige Funktionssymbol $\Diamond$ durch den Satz

$$\sigma_{\Diamond} :\equiv \forall x \forall y \Big(\Diamond xy = \big\{ \{x\}, \{x, y\} \big\} \Big). \tag{4}$$

für $\langle\rangle xy$. Für die bessere Lesbarkeit schreiben wir

$$\langle x, y\rangle$$

für $\langle\rangle xy$. Wir nennen $\langle x, y\rangle$ das aus x und y bestehende *geordnete Paar*. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathsf{T} := \{\sigma_{\{\}}, \sigma_{\{\}_1}, \sigma_{\langle\rangle}\} \vdash \forall x \forall y \forall x' \forall y' \Big(\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle \leftrightarrow x = x' \wedge y = y'\Big) \tag{5}$$

Hinweise:

- Zeigen Sie das mittels eines semantischen Beweises wie folgt. Sei $(A, \mathbf{M}) \models \mathsf{T}$ ein Modell. Wir schreiben:

$$\boldsymbol{\in} \quad \boldsymbol{\{\}} \quad \boldsymbol{\{\}}_1 \quad \boldsymbol{\langle\rangle} \qquad \text{für} \qquad \in^{\mathbf{M}} \quad \{\}^{\mathbf{M}} \quad \{\}_1^{\mathbf{M}} \quad \langle\rangle^{\mathbf{M}} \tag{6}$$

- Seien a, b, a', b' in A, sodass

$$\boldsymbol{\langle} a,b \boldsymbol{\rangle} \equiv \boldsymbol{\langle} a',b' \boldsymbol{\rangle}.$$

  Zeigen Sie, dass gilt:

$$a \equiv a'$$

  Betrachten Sie dazu die folgenden Fälle:

  – $\boldsymbol{\{} a \boldsymbol{\}} :\equiv \boldsymbol{\{\}}_1(a) \equiv \boldsymbol{\{} a' \boldsymbol{\}}$
  – $\boldsymbol{\{} a \boldsymbol{\}} \equiv \boldsymbol{\{} a',b' \boldsymbol{\}} :\equiv \boldsymbol{\{\}}(a', b')$

  Zeigen Sie, dass gilt:

$$b \equiv b'$$

  Betrachten Sie dazu die folgenden Fälle und verwenden Sie, dass $a \equiv a'$.

  – $\boldsymbol{\{} a,b \boldsymbol{\}} \equiv \boldsymbol{\{} a',b' \boldsymbol{\}}$

    Unterfälle:
    $b \equiv b'$
    $b \equiv a'$

  – $\boldsymbol{\{} a,b \boldsymbol{\}} \equiv \boldsymbol{\{} a' \boldsymbol{\}}$

2. **(∗) (“Menge” aller Mengen)** Zeigen Sie, dass aus dem Aussonderungsaxiom ZF_5 folgt, dass die Menge aller Mengen nicht existiert, d. h.:

$$\mathsf{ZF}_5 \vdash \nexists x \forall z (z \in x)$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass eine bestimmte andere Menge nicht existiert.

3. **(Menge (?) aller Einpunktmengen)** Existiert unter der Annahme der bisher behandelten Zermelo-Fraenkel-Axiome (bis ZF_5) die Menge aller Einpunktmengen? Eine Einpunktmenge ist eine Menge der Form $\{z\}$, wobei z eine Menge ist.

4. **(∗) (Durchschnitt zweier Mengen ist eine Menge)** Wir definieren die Formel

$$\psi :\equiv z \in x \wedge z \in y.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathsf{T} := \big\{\mathsf{ZF}_0, \dots, \mathsf{ZF}_5\big\} \vdash \forall x \forall y \exists u \forall z \big(z \in u \leftrightarrow \psi\big) \tag{7}$$

$$\mathsf{T} \vdash \forall x \forall y \forall u \forall v \Big(\forall z \big(z \in u \leftrightarrow \psi\big) \wedge \forall z \big(z \in v \leftrightarrow \psi\big) \rightarrow u = v\Big) \tag{8}$$

Bemerkung zur Relevanz: Wir definieren das *zweistellige Durchschnittssymbol* als das zweistellige Funktionssymbol $\cap$ durch den Satz

$$\forall x \forall y \forall z \big(z \in x \cap y \leftrightarrow z \in x \wedge z \in y\big).$$

Gemäss (7,8) ist $\cap$ wohldefiniert, d. h., für jedes Paar von Mengen x, y gibt es eine eindeutige Menge $u = x \cap y$, sodass für jedes z die Formel ψ gilt.

5. **(symmetrische Differenz ist eine Menge)**

(a) Wir definieren die Formel

$$\psi :\equiv \big(z \in x \vee z \in y\big) \wedge \neg\big(z \in x \wedge z \in y\big).$$

Seien x, y Mengen. Wir definieren die *symmetrische Differenz* von x und y naiv als

$$x \triangle y := \{z \mid \psi\}. \tag{9}$$

Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm dieser Menge.

Bemerkung: Wir betrachten eine Formel φ, in der genau z frei vorkommt. Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, existiert die Menge $\{z \mid \varphi\}$ nicht immer. Das gilt gemäss der Russellschen Antinomie zum Beispiel für $\varphi :\equiv z \notin z$. Wir werden jedoch gleich sehen, dass die Menge (9) tatsächlich existiert.

(b) Überlegen Sie sich anhand des Venn-Diagramms, dass gilt:

$$x \triangle y = (x \backslash y) \cup (y \backslash x)$$

($x \backslash y$ ist die Differenzmenge von x und y.)

(c) Wir schreiben $\mathsf{T} := \big\{\mathsf{ZF}_0, \dots, \mathsf{ZF}_5\big\}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathsf{T} \vdash \forall x \forall y \exists u \forall z \big(z \in u \leftrightarrow \psi\big) \tag{10}$$

$$\mathsf{T} \vdash \forall x \forall y \forall u \forall v \Big(\forall z \big(z \in u \leftrightarrow \psi\big) \wedge \forall z \big(z \in v \leftrightarrow \psi\big) \rightarrow u = v\Big) \tag{11}$$

Bemerkung zur Relevanz: Wir definieren das *symmetrische Differenzsymbol* als das zweistellige Funktionssymbol $\triangle$ durch den Satz

$$\forall x \forall y \forall z \big(z \in x \triangle y \leftrightarrow \psi\big).$$

Gemäss (10,11) ist $\triangle$ wohldefiniert, d. h., für jedes Paar von Mengen x, y gibt es eine eindeutige Menge $u = x \triangle y$, sodass für jedes z die Formel φ gilt.

6. **(Nichtstandardmodell der Peano-Arithmetik)** Seien $\mathscr{L}_{\mathrm{PA}} = \{0, \mathrm{s}, +, \cdot\}$ die Signatur und PA das Axiomensystem der Peano-Arithmetik. Wir nehmen an, dass die üblichen metamathematischen Regeln, insbesondere das Induktionsprinzip, gelten. Unter dieser Annahme existiert das Standardmodell $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ der PA. (Siehe Übungsserie 4, Modell: Peano-Arithmetik.) Gemäss einem Korollar aus der Vorlesung (Charakterisierung der Konsistenz einer Theorie) ist die PA unter dieser Annahme daher konsistent. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine echte Erweiterung des Modells $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ zu konstruieren.

(a) Seien $\mathscr{L}$ eine Signatur und Φ eine Menge von $\mathscr{L}$-Formeln. Zeigen Sie, dass Φ konsistent ist, wenn jede ENDLICHE Teilmenge davon konsistent ist.

(b) Sei c ein Konstantensymbol. Wir definieren die erweiterte Signatur

$$\mathscr{L}_{\mathrm{PA}^+} := \mathscr{L}_{\mathrm{PA}} \cup \{c\}.$$

Wir definieren die Relationen $\leqslant$ und $<$ auf $\mathbb{N}$ wie in Übungsserie 4 (Relation, Modell: Teiltheorie von DLO). (Diese Relationen haben die übliche Bedeutung.) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die $\mathscr{L}_{\mathrm{PA}^+}$-Formel

$$\varphi_n :\equiv \neg\big(c = \mathrm{s} \cdots \mathrm{s}\, 0\big), \tag{12}$$

wobei das Symbol s auf der rechten Seite genau n-mal vorkommt. Wir definieren das erweiterte Axiomensystem

$$\mathsf{PA}_n := \mathsf{PA} \cup \big\{\varphi_i \,\big|\, i \text{ in } \mathbb{N},\ \mathbf{0} \leqslant i < n\big\}. \tag{13}$$

Zeigen Sie, dass PA_n konsistent ist.

Hinweise:

- Erweitern Sie das Standardmodell $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ der PA zu einem Modell von PA_n.
- Verwenden Sie ein KOROLLAR zum KORREKTHEITSSATZ und GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ aus der Vorlesung.

(c) Zeigen Sie, dass das Axiomensystem $\mathsf{PA}^+ := \mathsf{PA} \cup \big\{\varphi_i \,\big|\, i \in \mathbb{N}\big\}$ konsistent ist.

Hinweis: Verwenden Sie die vorherigen Teilaufgaben.

(d) Zeigen Sie, dass es ein Modell $\mathbf{M}$ der Peano-Arithmetik gibt, das nicht isomorph zum Standardmodell $\mathbb{N}$ ist. Der Begriff der Isomorphie ist wie folgt definiert. Seien $\mathscr{L}$ eine Signatur und $(A, \mathbf{M})$ und $(B, \mathbf{N})$ zwei $\mathscr{L}$-Strukturen. Ein *Isomorphismus zwischen* $\mathbf{M}$ *und* $\mathbf{N}$ ist eine Bijektion $f : A \to B$, sodass gilt:

i. $f(c^{\mathbf{M}}) \equiv c^{\mathbf{N}}$ für jedes Konstantensymbol $c \in \mathscr{L}$

ii. $f\left(F^{\mathbf{M}}\big(a_1, \ldots, a_n\big)\right) \equiv F^{\mathbf{N}}\big(f(a_1), \ldots, f(a_n)\big)$ für jedes $n \in \mathbb{N}\backslash\{\mathbf{0}\}$, jedes n-stellige Funktionssymbol $F \in \mathscr{L}$ und alle $a_1, \ldots, a_n$ in A

iii. $\big(a_1, \ldots, a_n\big) \in R^{\mathbf{M}} \Leftrightarrow \big(f(a_1), \ldots, f(a_n)\big) \in R^{\mathbf{N}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}\backslash\{\mathbf{0}\}$, jedes n-stellige Relationssymbol $R \in \mathscr{L}$ und alle $a_1, \ldots, a_n$ in A

Wir nennen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$ *isomorph* g. d. w. es Isomorphismus zwischen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$ gibt.

Hinweise:

- Aus der letzten Teilaufgabe und einem KOROLLAR zum KORREKTHEITSSATZ und GÖDELSCHEN VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ aus der Vorlesung folgt, dass es ein Modell für PA^+ gibt.

- Falls es einen Isomorphismus f zwischen Ihrem gefundenen PA-Modell $(A, \mathbf{M})$ und $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ gibt, betrachten Sie dann $f(a)$ für ein spezielles a in A.

Bemerkungen:

- Ein Modell der PA, das nicht isomorph zum Standardmodell $\mathbb{N}$ ist, heisst *Nichtstandardmodell der PA*. In dieser Aufgabe konstruieren wir also ein solches Nichtstandardmodell.
- Die Peano-Arithmetik beschreibt also nicht nur die Standardmenge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, sondern auch Nichtstandardmengen "natürlicher Zahlen".