Serie 7

Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

0. **(Mengen, Element, Teilmenge, Mengenoperationen)** Seien $n \in \omega$ und $x_0, \dots, x_{n-1}$ Mengen. Wir schreiben

$$\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$$

für die Menge, die genau die Elemente $x_0, \dots, x_{n-1}$ enthält. Wir definieren

$$0 := \varnothing, \qquad 1 := \{0\}, \qquad 2 := \{0, 1\}, \qquad 3 := \{0, 1, 2\}, \qquad \dots$$

(a) **(zeichnen)** Zeichnen Sie die Menge

$$S := \big\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x \geqslant 0 \wedge x \leqslant y \wedge y \leqslant 1\big\}.$$

(Wir werden die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen in der nächsten Woche definieren.)

(b) **(∗) (Element, Teilmenge)** Welche der folgenden Aussagen[1] sind wahr?[2] Warum?

i. $\varnothing \in \varnothing$
ii. $\varnothing \in \{\varnothing\}$
iii. $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$
iv. $\{1\} \in 3$
v. $\{1\} \subseteq 3$
vi. $2 \subseteq \{1, 2\}$

(c) **(Anzahl Elemente)** Sei S eine endliche Menge. Wir definieren die Anzahl Elemente von S als die eindeutige natürliche Zahl $|S| = n \in \omega$, sodass es eine Bijektion zwischen S und n gibt. (Dass n eindeutig ist, folgt mittels Induktion. Siehe **2**.c.)

Welche Anzahl Elemente besitzen die folgenden Mengen?

i. die leere Menge $\varnothing$
ii. $\{\varnothing\}$
iii. $\{0, 1, 0\}$
iv. $\big\{(-1)^n \,\big|\, n \in \mathbb{Z}\big\} := \big\{m \in \mathbb{Z} \,\big|\, \exists n \in \mathbb{Z}\big(m = (-1)^n\big)\big\}$

(d) **(Lösungsmenge)** Was ist die Lösungsmenge der Gleichung $x - 1 = 0$ über der Menge ω der natürlichen Zahlen?

---

[1] Wir wechseln hier zur in der Mathematik üblichen Sichtweise, dass ein Satz, d. h. eine geschlossene Formel, eine Aussage ist. Das ist nicht wörtlich der Fall. Strikt genommen wird ein Satz erst durch eine Interpretation zu einer Aussage.

[2] Damit meinen wir, dass die Formel in jedem Modell der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre wahr ist.

(e) ($\cup, \bigcup, \cap, \backslash, \triangle$) Bestimmen Sie die Vereinigung $X \cup Y$, den Durchschnitt $X \cap Y$, die Differenz $X \backslash Y$ und die symmetrische Differenz $X \triangle Y$ für die Mengen

$$X := \{0, 1\}, \qquad Y := \{1, 2\}.$$

Bestimmen Sie die Vereinigung

$$\bigcup 2.$$

(f) **($*$) (kartesisches Produkt)**

i. Bestimmen Sie das kartesische Produkt $\{0, 1\} \times \{2, 3\}$.

ii. Sei A eine Menge und $n \in \omega$. Wir definieren die *n-te kartesische Potenz von A* als die Menge

$$A^n := {}^n A = \big\{\text{Funktion } f : n \to A\big\}$$

Bestimmen Sie die kartesische Potenz $\{2, 3\}^2$.

(g) **(Potenzmenge)**

i. **($*$)** Bestimmen Sie die Potenzmenge

$$\mathcal{P}(2) := \mathcal{P}2.$$

ii. Zeigen Sie, dass in ZF eine eindeutige Menge A existiert, sodass

$$\forall x \Big(x \in A \leftrightarrow \forall n \big(n \in x \to n \in \omega\big)\Big).$$

Hinweis: Wie heisst diese Menge A?

1. **(Satz von Cantor)** Sei A eine Menge. Zeigen Sie, dass es keine surjektive Abbildung $g : A \to {}^A 2$ gibt.

Bemerkung: Das ist eine Variante des Satzes von Cantor, den wir in der Vorlesung behandelt haben.

Hinweis: zweites Cantorsches Diagonalverfahren. Wir haben eine Variante dieses Verfahrens im Beweis des Satzes von Cantor verwendet.

2. **(Menge ω der natürlichen Zahlen: Wohldefiniertheit, kleinste induktive Menge; Induktionsprinzip in ZF)** Erinnerung: Wir definieren das *Nachfolgersymbol* als das einstellige Funktionssymbol s durch den Satz

$$\forall x \big(\mathrm{s}\, x = x \cup \{x\}\big).$$

Wir definieren das unäre Relationssymbol ind durch den Satz

$$\forall x \big(\mathrm{ind}\, x \leftrightarrow \forall y \in x (\mathrm{s}\, y \in x)\big).$$

Wir nennen eine Menge x *induktiv*, falls $\mathrm{ind}\, x$ gilt.

(a) **(∗) (ω ist wohldefiniert)** Seien I und I' induktive Mengen, die $\varnothing$ enthalten. Wir definieren

$$S_I := \{X \in \mathcal{P}(I) \mid \varnothing \in X \wedge \operatorname{ind} X\}.$$

Zeigen Sie, dass in ZF gilt:

$$\bigcap S_I = \bigcap S_{I'} \tag{1}$$

Relevanz: Wir definieren die Menge der natürlichen Zahlen als

$$\omega := \bigcap S_I, \tag{2}$$

wobei I eine beliebige induktive Menge ist, die $\varnothing$ enthält. Wegen (1) hängt die rechte Seite von (2) nicht von der Wahl von I ab. Gemäss dem Unendlichkeitsaxiom gibt es ein I wie oben. Daher ist die Menge ω wohldefiniert. (In der Vorlesung haben wir mittels des Potenzmengen-, Aussonderungs-, Vereinigungs- und Extensionalitätsaxiom gezeigt, dass die rechte Seite von (2) überhaupt sinnvoll ist.)

(b) **(kleinste induktive Menge, die $\varnothing$ enthält)**

i. Zeigen Sie, dass ω die leere Menge enthält und induktiv ist.
ii. Zeigen Sie, dass ω die kleinste solche Menge ist. Das heisst, dass ω eine Teilmenge jeder induktiven Menge ist, welche die leere Menge enthält.

(c) **(∗) (Induktionsprinzip von ZF)** Das Induktionsprinzip der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre besagt:

$$\forall X\big(X \subseteq \omega \wedge \varnothing \in X \wedge \operatorname{ind} X \to X = \omega\big) \tag{3}$$

In Worten: Jede nichtleere induktive Teilmenge der natürlichen Zahlen ist gleich der Menge der natürlichen Zahlen.

Zeigen Sie, dass dieses Induktionsprinzip gilt.

Bemerkung: Das entspricht dem gewöhnlichen Induktionsprinzip, das Sie aus der Schule kennen. Um das einzusehen, sei $n \in \omega$. Wir schreiben $n + 1 := \mathrm{s}\, n$. Sei $P(n)$ eine von $n \in \omega$ abhängige Aussage, sodass $P(0)$ gilt und für jedes $n \in \omega$ aus $P(n)$ die Aussage $P(n+1)$ folgt. Dann gilt für jedes $n \in \omega$ die Aussage $P(n)$. Das folgt aus (3), indem wir die folgende Menge betrachten:

$$X := \{n \in \omega \mid P(n)\}$$

3. (natürliche Zahlen und ω sind Ordinalzahlen) Wir definieren den Begriff einer Ordinalzahl wie folgt. Sei A eine Menge und R eine binäre Relation auf A.

Definition 1 (lineare Ordnung, Wohlordnung, Ordinalzahl)

- *(Trichotomie) Wir sagen, dass R* Trichotomie *erfüllt g. d. w. für alle $x, y \in A$ gilt:*

$$\text{entweder } xRy \text{ oder } x = y \text{ oder } yRx \tag{4}$$

(ausschliessendes Oder)

- *(lineare Ordnung) R heisst (*strikte*)* lineare Ordnung *(*auf *A) g. d. w. R transitiv ist und Trichotomie erfüllt.*

- *(minimales Element) Sei R eine lineare Ordnung auf A und $S \subseteq A$. Ein Element $x \in S$ heisst (R-)*minimal *g. d. w. für jedes $y \in S\backslash\{x\}$ gilt xRy.*
- *(Wohlordnung) R heisst* Wohlordnung *(auf A) g. d. w. R eine lineare Ordnung ist und jede nichtleere Teilmenge $S \subseteq A$ ein R-minimales Element besitzt. In diesem Fall nennen wir A R-*wohlgeordnet.
- *(Ordinalzahl) Wir schreiben*

  $$\in_A := \{\langle x, y\rangle \in A \times A \,|\, x \in y\},$$

  Die Menge A heisst Ordinalzahl *g. d. w. sie $\in_A$-wohlgeordnet ist.*

Motivation: Der Begriff einer Ordinalzahl präzisiert und verallgemeinert die intuitive Idee der Position in einer Liste. Ein zentraler Aspekt ist hierbei, dass wir je zwei Positionen miteinander vergleichen können. Die Positionen sind also linear geordnet.

Jede natürliche Zahl n ist eine Ordinalzahl. (Siehe **3**.b.) Sie entspricht der intuitiven Idee der n-ten Position. Wir identifizieren also $n = 0, 1, 2, \ldots$ mit den Wörtern "nullter, erster, zweiter, ...".[3] Die Menge ω der natürlichen Zahlen ist ebenfalls eine Ordinalzahl. (Siehe **3**.a.) Sie ist grösser (bezüglich der linearen Ordnung $\in$) als jede natürliche Zahl. Es gibt viele noch grössere Ordinalzahlen, zum Beispiel

$$\omega + 1 := \mathrm{s}(\omega) = \omega \cup \{\omega\}, \quad \omega + 2 := \mathrm{s}(\mathrm{s}(\omega)), \quad \ldots, \quad \omega + \omega = \omega \cdot 2, \quad \ldots, \quad \omega \cdot 3,$$
$$\ldots, \quad \omega \cdot \omega = \omega^2, \quad \ldots, \quad \omega^3, \quad \ldots, \quad \omega^\omega, \quad \ldots, \quad \omega^{\omega^\omega} = \omega^{(\omega^\omega)}, \quad \ldots$$

Für die Definition dieser Ordinalzahlen siehe S. 166 in:

L. Halbeisen und R. Krapf, *Gödel's theorems and Zermelo's axioms—a firm foundation of mathematics*, Birkhäuser/Springer, Cham, 2020.

Für $\omega + \omega$ siehe auch **6**. Zur Illustration siehe Abbildung 1.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge ω der natürlichen Zahlen eine Ordinalzahl ist.

   Hinweise:

   i. Transitivität von $\in_\omega$: Verwenden Sie Induktion, d. h. **2**.c.

   ii. Trichotomie für $\in_\omega$: Wir schreiben

   $$\varphi :\equiv m \in n \vee m = n \vee n \in m.$$

   Beweis von $\forall m, n \in \omega\, \varphi$: Wir definieren:

   $$S_n := \{m \in \omega \,|\, \varphi\} \qquad \text{(für } n \in \omega) \tag{5}$$

   Zeigen Sie wie folgt mittels Induktion, dass für jedes $n \in \omega$ gilt $S_n = \omega$:

   - Zeigen Sie mittels Induktion, dass $S_0 = \omega$.
   - **Hilfssatz 2** *Für alle $n \in \omega$ und $m \in n$ gilt $n \notin m$.*
     Beweis des Hilfssatzes: Wir betrachten die Menge

     $$A := \{n \in \omega \,|\, \forall m \in n (n \notin m)\}.$$

[3] Wir fangen hier bei 0 mit Zählen an.

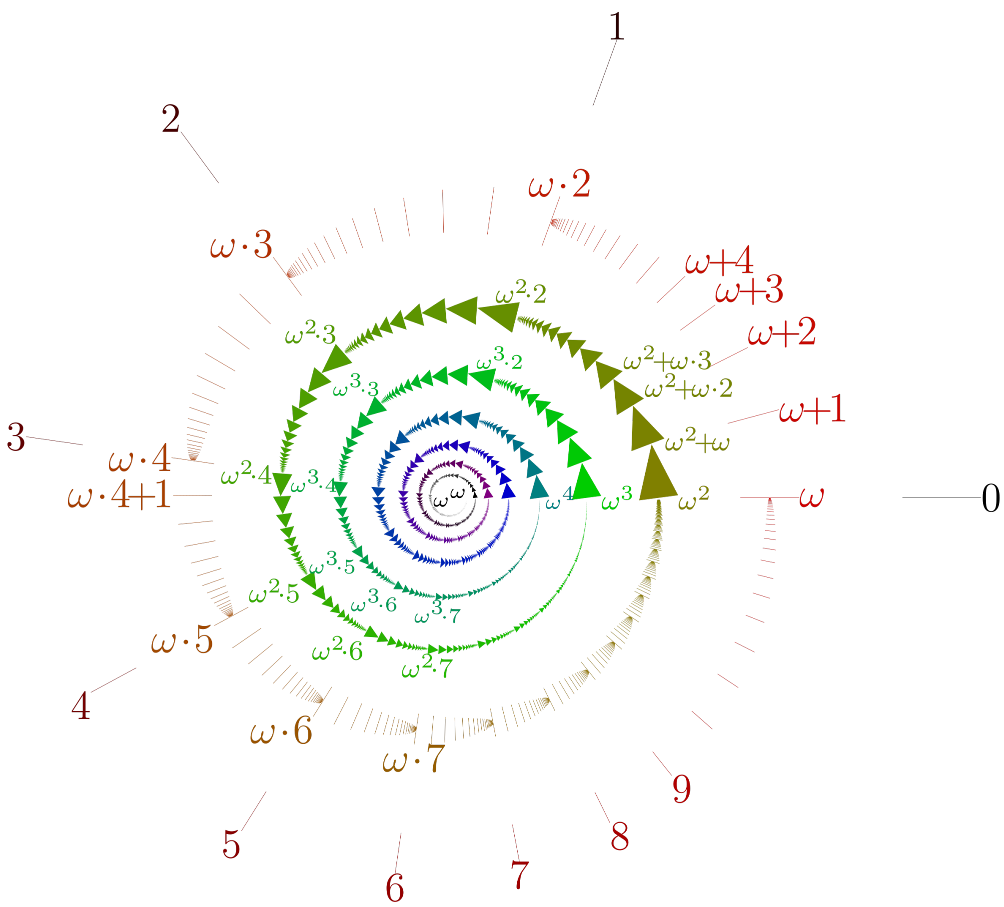

Abbildung 1: Die Ordinalzahlen $0,\ 1,\ \ldots,\ \omega,\ \omega+1,\ \ldots,\ \omega\cdot 2,\ \ldots,\ \omega^2,\ \ldots,\ \omega^\omega$.

Zeigen Sie mittels Induktion, dass $A = \omega$.

Wir nehmen an, dass $S_n = \omega$. Zeigen Sie mittels Induktion, dass $S_{\mathrm{s}\,n} = \omega$. Induktionsschritt: Sei $m \in S_{\mathrm{s}\,n}$. Wir zeigen, dass

$$\mathrm{s}\,m \in S_{\mathrm{s}\,n}.$$

Fall $m \in \mathrm{s}\,n = n \cup \{n\}$**:**

Unterfall: $m \in n$**:** Dann gilt

$$n \notin \mathrm{s}\,m.$$

Das folgt aus Transitivität von $\in_\omega$ (siehe **3**.a) und Hilfssatz 2. Wegen unserer Annahme $S_n = \omega$ gilt $\mathrm{s}\,m \in S_n$. Mittels (5) folgt, dass $n = \mathrm{s}\,m$ oder $\mathrm{s}\,m \in n$.

iii. Trichotomie für $\in_\omega$: Beweis, dass für alle $m, n \in \omega$ höchstens eine der Aussagen $m \in n$, $m = n$, $n \in m$ gilt: Verwenden Sie **3**.(a)i und Hilfssatz 2.

iv. $\in_\omega$ ist Wohlordnung: Zeigen Sie mittels Induktion, dass jede nichtleere Teilmenge einer natürlichen Zahl ein $\in$-kleinstes Element besizt.
Sei jetzt $S \subseteq \omega$ nichtleer. Wir wählen ein $n \in S$. Betrachten Sie $S \cap \mathrm{s}\,n$.

(b) **(natürliche Zahl ist Ordinalzahl)** Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl eine Ordinalzahl ist.

Hinweis: Verwenden Sie **3**.a.

4. **(Endlichkeit, Abzählbarkeit)** Erinnerung: Wir nennen eine Menge A *abzählbar* g. d. w. es eine injektive Abbildung $f : A \to \omega$ gibt. Zeigen Sie, dass in ZF gilt:

(a) **($*$)** Jede endliche Menge ist abzählbar.

(b) Eine nichtleere Menge A ist genau dann abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $g : \omega \to A$ gibt.

Hinweis für die Implikation "$\leftarrow$": Sei $g : \omega \to A$ surjektiv. Definieren Sie eine Abbildung $f : A \to \omega$ so, dass für jedes $a \in A$ gilt:

$$f(a) \in g^{-1}(a) = \{n \in \omega \mid g(n) = a\}.$$

Verwenden Sie dazu **3**.a.

Bemerkung: Wir können nicht einfach sagen, dass wir für jedes $a \in A$ ein $n \in g^{-1}(a)$ wählen und $f(a)$ als dieses n definieren. Um das Wort *wählen* hier zu formalisieren, brauchen wir nämlich das Auswahlaxiom. (Dieses wird später in der Vorlesung behandelt.)

5. **(iterativ definierte Menge, Ersetzungsschema)** Seien f ein einstelliges Funktionssymbol und v eine Variable. Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass in ZF die Menge

$$B := \{v, f(v), f(f(v)), \dots\}$$

existiert. Das bedeutet, dass es eine kleinste Menge B gibt, die v enthält und unter f abgeschlossen ist, d. h. für jedes $u \in B$ auch $f(u)$ enthält. Damit meinen wir formal:

$$\forall v \exists B \Big(v \in B \wedge \forall u \in B (fu \in B) \wedge \forall C \big(v \in C \wedge \forall u \in C (fu \in C) \to B \subseteq C \big) \Big) \tag{6}$$

Zeigen Sie diese Aussage.

Hinweise: Wir definieren:

$$\begin{aligned} \alpha(n, g) &:\equiv \exists Y \big(g \subseteq (\mathrm{s}\, n) \times Y \big) && (7) \\ \beta(n, g) &:\equiv \forall m \in n \forall u \big(\langle m, u \rangle \in g \to \langle \mathrm{s}\, m, fu \rangle \in g \big) && (8) \\ \gamma(g) &:\equiv \forall m \forall u \forall w \big(\langle m, u \rangle \in g \wedge \langle m, w \rangle \in g \to u = w \big) && (9) \\ \delta(n, g) &:\equiv \alpha(n, g) \wedge \beta(n, g) \wedge \gamma(g) \wedge \langle 0, v \rangle \in g && (10) \end{aligned}$$

Seien $n \in \omega$ und g so, dass $\delta(n, g)$ gilt. Sei Y wie in $\alpha(n, g)$.

Bemerkungen 3 $\quad g$ ist eine Funktion von $\mathrm{s}\, n$ nach Y. Begründung:

- (Relation zwischen $\mathrm{s}\, n$ und Y) Wegen $\alpha(n, g)$ ist g eine Relation zwischen den Mengen $\mathrm{s}\, n$ und Y, d. h. eine Teilmenge von $(\mathrm{s}\, n) \times Y$.

  Seien X, Y Mengen und R eine Relation zwischen X und Y.
- (g ist linkstotal) Wir nennen R *linkstotal* g. d. w. es für jedes $x \in X$ (mindestens) ein $y \in Y$ gibt, sodass $\langle x, y \rangle \in R$. Aus $\langle 0, v \rangle \in g$ und $\beta(n, g)$ folgt mittels Induktion, dass g linkstotal ist.
- (g ist rechtseindeutig) Wir nennen R *rechtseindeutig* g. d. w. es für jedes $x \in X$ *höchstens* ein $y \in Y$ gibt, sodass $\langle x, y \rangle \in R$. Wegen $\gamma(g)$ ist g rechtseindeutig.
- (g ist eine Funktion) Eine Funktion von X nach Y ist eine Relation zwischen X und Y, die linkstotal und rechtseindeutig ist. Gemäss den vorherigen Bemerkungen ist g also eine Funktion von $\mathrm{s}\, n$ nach Y. Diese Funktion entspricht der endlichen Folge $v, f(v), f(f(v)), \ldots, f^{\circ n}(v) = f(\cdots f(v) \cdots)$ (n Kopien von f).

Wir definieren $g(n)$ als das eindeutige Element $y \in Y$, sodass $\langle n, y \rangle \in g$. Gemäss den Bemerkungen 3 ist $g(n)$ wohldefiniert, d. h. ein solches y existiert und ist eindeutig. Wir definieren:

$$\psi(n) :\equiv \forall g \forall h \big(\delta(n, g) \wedge \delta(n, h) \to g(n) = h(n) \big) \tag{11}$$

(a) Zeigen Sie, mittels Induktion, dass gilt:

$$\forall n\, \psi(n)$$

Induktionsschritt: Sei $n \in \omega$ so, dass $\psi(n)$ gilt. Seien g', h' so, dass $\delta(\mathrm{s}\, n, g'), \delta(\mathrm{s}\, n, h')$ gelten. Betrachten Sie

$$g := g'|_{\mathrm{s}\, n}, \qquad h := h'|_{\mathrm{s}\, n}$$

(b) Wir definieren

$$\varphi(n, y) :\equiv \exists g \big(\delta(n, g) \wedge \langle n, y \rangle \in g \big).$$

Zeigen Sie mittels Ersetzungsaxiomenschemas, dass es eine Menge B gibt, sodass gilt:

$$\forall y \Big(y \in B \leftrightarrow \exists n \big(n \in \omega \wedge \varphi(n, y) \big) \Big)$$

(c) Überprüfen Sie, dass dieses B die Bedingungen in (6) erfüllt.

- Hinweis für die Bedingung $\forall u \in B(fu \in B)$: Sei $u \in B$. Wir wählen ein $n \in \omega$, sodass $\varphi(n, u)$ gilt. Wir wählen ein g, sodass $\delta(n, g)$ gilt und $\langle n, u\rangle \in g$. Betrachten Sie
$$g' := g \cup \{\langle \mathrm{s}\, n, fu\rangle\}.$$
- Hinweis für die Bedingung $\forall C\big(v \in C \wedge \forall u \in C(fu \in C) \to B \subseteq C\big)$: Sei C so, dass $v \in C$ und $\forall u \in C(fu \in C)$.

  Behauptung: Für alle $n \in \omega$ gilt:
$$\forall g \forall y\big(\beta(n, g) \wedge \gamma(g) \wedge \langle 0, v\rangle \in g \wedge \langle n, y\rangle \in g \to y \in C\big) \tag{12}$$
  Zeigen Sie das mittels Induktion.
  Induktionsschritt: Sei $n \in \omega$ so, dass (12) gilt. Seien g', y so, dass
$$\beta(\mathrm{s}\, n, g') \wedge \gamma(g') \wedge \langle 0, v\rangle \in g' \wedge \langle \mathrm{s}\, n, y\rangle \in g'.$$
  Betrachten Sie
$$g := g' \backslash \{\langle \mathrm{s}\, n, y\rangle\}.$$

6. **(∗) (Ordinalzahl $\omega + \omega$)** Wir schreiben $\omega + 1 := \mathrm{s}\,\omega = \omega \cup \{\omega\}$, $\omega + 2 := (\omega + 1) + 1, \ldots$. Formalisieren Sie die Aussage, dass die Menge
$$\big\{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\big\} \tag{13}$$
existiert. Beweisen Sie diese Aussage.

Hinweis: Verwenden Sie **5**.

Bemerkungen:

- Da die Menge (13) existiert, existiert auch die Menge
$$\omega \cdot 2 := \omega + \omega := \omega \cup \big\{\omega, \omega + 1, \ldots\big\} = \big\{0, 1, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots\big\}.$$
- Diese Menge ist eine Ordinalzahl. Das folgt aus **3**.a.

7. **(∗) (Fundierungsaxiom)** Zeigen Sie, dass in ZF gilt:
$$\forall z(z \notin z)$$
Hinweis: Verwenden Sie das Paarmengen- und Fundierungsaxiom.