Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **(∗)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen und abzugeben.

8.1. reelle Zahl, Dedekind-Schnitt In dieser Aufgabe verwenden wir die Notationen aus der Vorlesung. Für jede rationale Zahl r bezeichnet $\mathbf{r}$ zum Beispiel die reelle Zahl (d. h. den Dedekind-Schnitt)

$$\mathbf{r} := \left\{ s \in \mathbb{Q} \,\middle|\, s > r \right\} \in \mathbb{R}.$$

(a) **(∗)** Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{1} + \mathbf{2} = \mathbf{3}. \tag{1}$$

Tipps:

- Zeigen Sie, dass in (1) die Inklusionen $\subseteq$ und $\supseteq$ gelten.
- Um $\supseteq$ zu zeigen, betrachten Sie zu gegebenem rationalem $t > 3$ die rationalen Zahlen
$$r := 1 + \frac{t-3}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{t}{2}, \qquad s := 2 + \frac{t-3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{t}{2}.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}. \tag{2}$$

Tipps:

- Zeigen Sie, dass in (2) die Inklusionen $\subseteq$ und $\supseteq$ gelten.
- Um $\supseteq$ zu zeigen, betrachten Sie zu gegebenem rationalem $t \in \mathbf{1}$ die rationalen Zahlen
$$r := \frac{t+1}{2}, \qquad s := \frac{t}{r}.$$
Zeigen Sie, dass $r, s \in \mathbf{1}$. Folgern Sie, dass in (2) die Inklusion $\supseteq$ gilt.

(c) **(∗)** Wir definieren

$$\sqrt{\mathbf{2}} := \left\{ r \in \mathbb{Q} \,\middle|\, r \geq 0,\, r^2 > 2 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\sqrt{\mathbf{2}}$ eine reelle Zahl ist, d. h. ein Dedekind-Schnitt.

Tipp: Die letzte Bedingung in der Definition eines Dedekind-Schnittes x besagt, dass

$$\forall r \in x \exists s_0 \in x : s_0 < r.$$

Zu gegebenem $r \in x$ betrachten Sie $s_0 := \dfrac{2r+2}{r+2}$.

8.2. lesen Lesen Sie den Rest des Beweises der Proposition aus der Vorlesung, die besagt, dass $(\sqrt{\mathbf{2}})^2 = \mathbf{2}$. Stellen Sie Fragen, falls Sie welche haben.

8.3. Vollständigkeit der reellen Zahlen, Existenz des Supremums Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge. Der erste Teil eines Satzes aus der Vorlesung (Vollständigkeit der reellen Zahlen) besagt, dass A ein Supremum besitzt. Das Ziel dieser Aufgabe ist, diesen Teil unter einer gewissen Bedingung zu beweisen. Dazu definieren wir

$$b := \bigcap A = \bigcap_{x \in A} x = \Big\{ r \in \mathbb{Q} \,\Big|\, \forall x \in A: \, r \in x \Big\}. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass b ein Supremum für A, d. h. eine kleinste obere Schranke, ist, falls

$$\nexists r \in \mathbb{Q}: \, b = \Big\{ s \in \mathbb{Q} \,\Big|\, s \geq r \Big\}. \tag{4}$$

Tipps:

- Zeigen Sie, dass b eine reelle Zahl, d. h. ein Dedekind-Schnitt ist. Überprüfen Sie dazu die Bedingungen in der Definition eines Dedekind-Schnittes. Für die Bedingung $b \neq \emptyset$ verwenden Sie zum Beispiel, dass A nach oben beschränkt ist.
- Zeigen Sie, dass b eine obere Schranke für A ist.
- Zeigen Sie, dass jede obere Schranke für A grösser gleich b ist.
- Folgern Sie daraus, dass A ein Supremum besitzt.

Bemerkungen:

1. Der zweite Teil des zitierten Satzes aus der Vorlesung (Vollständigkeit der reellen Zahlen) besagt, dass jede nach *unten* beschränkte nichtleere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ein Infimum besitzt. Wir zeigen dazu, dass $b := \bigcup A$ ein Infimum ist. Der Beweis davon ist analog zu den obigen Tipps.
2. Dass jede nichtleere nach *oben* beschränkte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ein Supremum besitzt, können wir alternativ dadurch zeigen, dass wir den zweiten Teil des zitierten Satzes auf die Menge

   $$-A := \Big\{ -a \,\Big|\, a \in A \Big\}$$

   anwenden.

Zur Vereinfachung benützen wir ab jetzt die normale Schriftstärke für den zu einer rationalen Zahl r gehörenden Dedekind-Schnitt $\mathbf{r}$, für die Ordnung $\boldsymbol{\leq}$ auf den reellen Zahlen usw. Wir schreiben jetzt

$$\mathbf{r} \qquad \boldsymbol{\leq} \qquad \boldsymbol{+} \qquad \boldsymbol{-} \qquad \boldsymbol{\cdot}$$

also als

$$r \qquad \leq \qquad + \qquad - \qquad \cdot$$

Wie üblich lassen wir das Produktzeichen $\cdot$ manchmal weg.

8.4. Supremum und Infimum bestimmen

- Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum jeder der folgenden Mengen.
- Bestimmen Sie, ob die Menge ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

1.) **(∗)** $A := \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

2.) $B := \left\{ \frac{1}{x} \,\middle|\, x \in (1, 2] \right\}$.

3.) $C := \left\{ \frac{x}{x+1} \,\middle|\, x \in [2, \infty) \right\}$.

8.5. Supremum und Infimum der Menge $-A$ Es sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge. Wir definieren:

$$-A := \left\{ -a \,\middle|\, a \in A \right\}$$

Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\sup(-A) = -\inf A, \quad \inf(-A) = -\sup A$$