

## Serie 9

Einige (Teil-)Aufgaben sind mit (\*) markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

0. **(natürliche Zahlen und  $\omega$  sind Ordinalzahlen)** Wir definieren den Begriff einer Ordinalzahl wie folgt. Sei  $A$  eine Menge und  $R$  eine binäre Relation auf  $A$ .

**Definition 1 (lineare Ordnung, Wohlordnung, Ordinalzahl)** • (Trichotomie) Wir sagen, dass  $R$  Trichotomie erfüllt g. d. w. für alle  $x, y \in A$  gilt:

$$\text{entweder } xRy \text{ oder } x = y \text{ oder } yRx \quad (1)$$

(ausschliessendes Oder)

- (lineare Ordnung)  $R$  heisst (strikte) lineare Ordnung (auf  $A$ ) g. d. w.  $R$  transitiv ist und Trichotomie erfüllt.
- (minimales Element) Sei  $R$  eine lineare Ordnung auf  $A$  und  $S \subseteq A$ . Ein Element  $x \in S$  heisst ( $R$ -)minimal g. d. w. für jedes  $y \in S \setminus \{x\}$  gilt  $xRy$ .
- (Wohlordnung)  $R$  heisst Wohlordnung (auf  $A$ ) g. d. w.  $R$  eine lineare Ordnung ist und jede nichtleere Teilmenge  $S \subseteq A$  ein  $R$ -minimales Element besitzt. In diesem Fall nennen wir  $A$   $R$ -wohlgeordnet.
- (Ordinalzahl) Wir schreiben

$$\in_A := \{ \langle x, y \rangle \in A \times A \mid x \in y \}.$$

Die Menge  $A$  heisst Ordinalzahl g. d. w. sie  $\in_A$ -wohlgeordnet ist.

**Motivation:** Der Begriff einer Ordinalzahl präzisiert und verallgemeinert die intuitive Idee der Position in einer Liste. Ein zentraler Aspekt ist hierbei, dass wir je zwei Positionen miteinander vergleichen können. Die Positionen sind also linear geordnet.

Jede natürliche Zahl  $n$  ist eine Ordinalzahl. (Siehe 0.b.) Sie entspricht der intuitiven Idee der  $n$ -ten Position. Wir identifizieren also  $n = 0, 1, 2, \dots$  mit den Wörtern “nullter, erster, zweiter, ...”.<sup>1</sup> Die Menge  $\omega$  der natürlichen Zahlen ist ebenfalls eine Ordinalzahl. (Siehe 0.a.) Sie ist grösser (bezüglich der linearen Ordnung  $\in$ ) als jede natürliche Zahl. Es gibt viele noch grössere Ordinalzahlen, zum Beispiel

$$\begin{aligned} \omega + 1 &:= s(\omega) = \omega \cup \{\omega\}, & \omega + 2 &:= s(s(\omega)), & \dots, & \omega + \omega = \omega \cdot 2, & \dots, & \omega \cdot 3, \\ & \dots, & \omega \cdot \omega = \omega^2, & \dots, & \omega^3, & \dots, & \omega^\omega, & \dots, & \omega^{\omega^\omega} = \omega^{(\omega^\omega)}, & \dots \end{aligned}$$

Für die Definition dieser Ordinalzahlen siehe S. 166 in:

L. Halbeisen und R. Krapf, *Gödel's theorems and Zermelo's axioms—a firm foundation of mathematics*, Birkhäuser/Springer, Cham, 2020.

Für  $\omega + \omega$  siehe auch 1. Zur Illustration siehe Abbildung 1.

<sup>1</sup>Wir fangen hier bei 0 mit Zählen an.

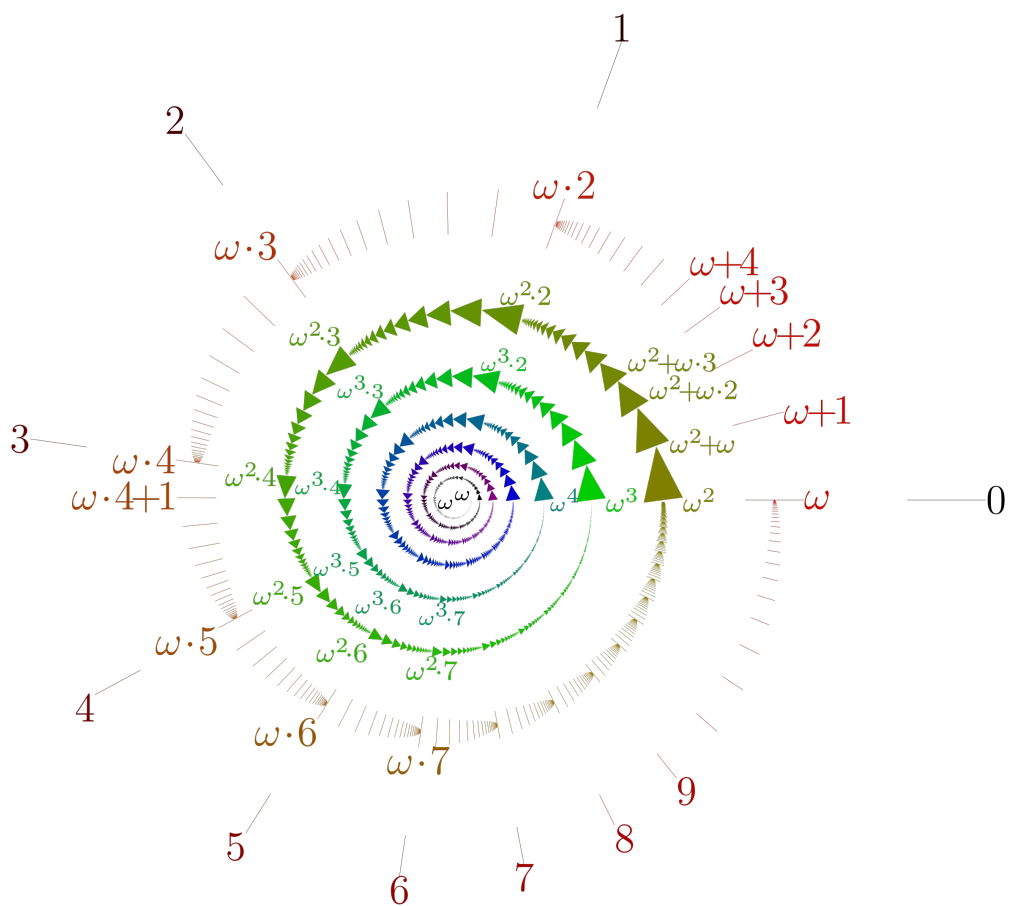


Abbildung 1: Die Ordinalzahlen  $0, 1, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \omega \cdot 2, \dots, \omega^2, \dots, \omega^\omega$ .

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge  $\omega$  der natürlichen Zahlen eine Ordinalzahl ist.

**Hinweise:**

- i. Transitivität von  $\in_\omega$ : Verwenden Sie Induktion. Siehe eine Aufgabe aus Übungsreihe 7 (das Induktionsprinzip von ZF).
- ii. Trichotomie für  $\in_\omega$ : Wir schreiben

$$\varphi := m \in n \vee m = n \vee n \in m.$$

Beweis von  $\forall m, n \in \omega \varphi$ : Wir definieren:

$$S_n := \{m \in \omega \mid \varphi\} \quad (\text{für } n \in \omega) \quad (2)$$

Zeigen Sie wie folgt mittels Induktion, dass für jedes  $n \in \omega$  gilt  $S_n = \omega$ :

- Zeigen Sie mittels Induktion, dass  $S_0 = \omega$ .
- **Hilfssatz 2** Für alle  $n \in \omega$  und  $m \in n$  gilt  $n \not\subseteq m$ .

Beweis des Hilfssatzes: Wir betrachten die Menge

$$A := \{n \in \omega \mid \forall m \in n (n \not\subseteq m)\}.$$

Zeigen Sie mittels Induktion, dass  $A = \omega$ .

Wir nehmen an, dass  $S_n = \omega$ . Zeigen Sie mittels Induktion, dass  $S_{s n} = \omega$ .

Induktionsschritt: Sei  $m \in S_{s n}$ . Wir zeigen, dass

$$s m \in S_{s n}.$$

**Fall**  $m \in s n = n \cup \{n\}$ :

**Unterfall:**  $m \in n$ : Dann gilt

$$n \not\subseteq s m.$$

Das folgt aus Transitivität von  $\in_\omega$  (siehe 0.a) und Hilfssatz 2. Wegen unserer Annahme  $S_n = \omega$  gilt  $s m \in S_n$ . Mittels (2) folgt, dass  $n = s m$  oder  $s m \in n$ .

- iii. Trichotomie für  $\in_\omega$ : Beweis, dass für alle  $m, n \in \omega$  höchstens eine der Aussagen  $m \in n$ ,  $m = n$ ,  $n \in m$  gilt: Verwenden Sie 0.(a)i und Hilfssatz 2.
- iv.  $\in_\omega$  ist Wohlordnung: Zeigen Sie mittels Induktion, dass jede nichtleere Teilmenge einer natürlichen Zahl ein  $\in$ -kleinstes Element besitzt.  
Sei jetzt  $S \subseteq \omega$  nichtleer. Wir wählen ein  $n \in S$ . Betrachten Sie  $S \cap s n$ .

- (b) **(natürliche Zahl ist Ordinalzahl)** Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl eine Ordinalzahl ist.

**Hinweis:** Verwenden Sie 0.a.

1. **(\*) (Ordinalzahl  $\omega + \omega$ )** Wir schreiben  $\omega + 1 := s \omega = \omega \cup \{\omega\}$ ,  $\omega + 2 := (\omega + 1) + 1, \dots$ . Formalisieren Sie die Aussage, dass die Menge

$$\{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots\} \quad (3)$$

existiert. Beweisen Sie diese Aussage.

**Hinweis:** Verwenden Sie eine Aufgabe aus Übungsserie 7 (iterativ definierte Menge, Ersetzungsschema).

**Bemerkungen:**

- Da die Menge (3) existiert, existiert auch die Menge

$$\omega \cdot 2 := \omega + \omega := \omega \cup \{\omega, \omega + 1, \dots\} = \{0, 1, \dots, \omega, \omega + 1, \dots\}.$$

- Diese Menge ist eine Ordinalzahl. Das folgt aus 0.a.