Serie 13

Einige (Teil-)Aufgaben sind mit **($*$)** markiert. Versuchen Sie, wenigstens diese Aufgaben zu lösen.

0. **($*$) natürliche Zahl ist Kardinalzahl)** Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl eine Kardinalzahl ist.

Hinweis: Verwenden Sie, dass für alle $m, n \in \omega$ gilt, dass $m \sim n \to m = n$. ($\sim$ steht hier für Gleichmächtigkeit. Siehe Übungsserie 11, Gleichmächtigkeit von natürlichen Zahlen.)

1. **(Kardinalität einer Kardinalzahl)** (Diese Aufgabe wurde schon in Übungsserie 12 gestellt.) Zeigen Sie, dass für jede Kardinalzahl κ die Gleichheit $|\kappa| = \kappa$ gilt.

Hinweise für $|\kappa| \geqslant \kappa$: Wählen Sie eine Menge A, sodass $|A| = \kappa$. Sei $\alpha \in \Omega$ so, dass $\alpha \sim \kappa$. Verwenden Sie A, um zu zeigen, dass $\alpha \geqslant \kappa$, d. h. $\alpha \supseteq \kappa$.

2. **($*$) (ganze Zahlen)** Wir definieren die binäre Relation $\sim$ auf der Menge $X := \omega \times \omega$ durch

$$\sim := \left\{ \left\langle \langle m, n \rangle, \langle m', n' \rangle \right\rangle \in X \times X \,\middle|\, m + n' = m' + n \right\}$$

Zeigen Sie, dass das eine Äquivalenzrelation ist.

(Hinweis zur Transitivität:) verwenden Sie, dass die Nachfolgerabbildung auf ω injektiv ist.

(Relevanz dieser Aufgabe:) Wir definieren die Menge der ganzen Zahlen als den Quotienten

$$\mathbb{Z} := (\omega \times \omega) / \sim,$$

d. h. als die Menge der $\sim$-Äquivalenzklassen. Für jedes Paar $\langle m, n \rangle \in X$ schreiben wir

$$m - n := \left[\langle m, n \rangle \right]_\sim.$$

3. **(rationale Zahlen)** Wir definieren $X := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\})$ und die binäre Relation $\sim$ auf X durch

$$\langle a, b \rangle \sim \langle a', b' \rangle :\leftrightarrow ab' = a'b.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(Relevanz dieser Aufgabe:) Wir definieren die Menge der rationalen Zahlen als den Quotienten

$$\mathbb{Q} := \left(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\}) \right) / \sim,$$

d. h. als die Menge der $\sim$-Äquivalenzklassen. Für jedes Paar $\langle a, b \rangle \in X$ schreiben wir

$$\frac{a}{b} := \left[\langle a, b \rangle \right]_\sim.$$

4. **($*$) (Kongruenz modulo n ist Äquivalenzrelation)** Zeigen Sie, dass $\underset{(n)}{\equiv}$ eine Äquivalenzrelation ist.

5. **(Addition, Multiplikation und Kongruenz)** (Diese Aufgabe ist ein Hilfssatz in der Vorlesung.) Seien $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ und $n \in \omega \backslash \{0\}$ so, dass $a \equiv a'$ und $b \equiv b' \pmod{n}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$a + b \equiv a' + b' \pmod{n} \tag{1}$$
$$ab \equiv a'b' \pmod{n} \tag{2}$$

(Relevanz:) Aus dieser Aufgabe folgt, dass Addition und Multiplikation von Restklassen wohldefiniert sind. (Siehe die Vorlesung.)

6. **(Restklassenring)** (Diese Aufgabe ist eine Proposition in der Vorlesung.) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$, der Restklassenring modulo n, ein kommutativer Ring (mit Eins) ist.