Lösungen der Probeprüfung

1. Der Gödel'sche Vollständigkeitssatz mit Korrektheitssatz besagt:

$$\underbrace{T \vdash \sigma}_{\sigma \text{ ist formal beweisbar aus } T} \text{ genau dann, wenn in jedem Modell } M \models T \text{ gilt } \underbrace{M \models \sigma}_{\sigma \text{ ist wahr in } M}$$

$$T \vdash \sigma \iff \forall M \, (M \models T \Rightarrow M \models \sigma)$$

$\Longrightarrow$ Korrektheitssatz

$\Longleftarrow$ Gödel'scher Vollständigkeitssatz

(A) & (B) richtig; (C)&(D): $GT \nvdash \forall x \forall y \, (x \circ y = y \circ x)$

2. (A) $\Rightarrow$ AC: wurde bewiesen

(B) $\Rightarrow$ AC: $x \in \bigtimes_{\lambda \in I} A_\lambda$, $\quad f_x : I \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$

$\mathcal{F} = \{A_\lambda : \lambda \in I\}$ und $A_\lambda \neq \emptyset$ $\quad$ $\lambda \longmapsto a_\lambda \in A_\lambda$

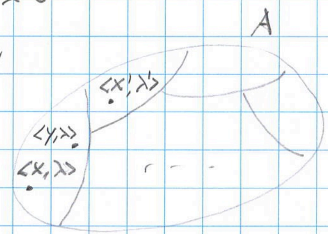
$x = \{a_\lambda : \lambda \in I\}$ mit $a_\lambda \in A_\lambda$ $\quad$ somit ist f_x eine Auswahlfunktion

(C) $\Rightarrow$ AC: $\quad \mathcal{F} = \{A_\lambda : \lambda \in I\}$ und $A_\lambda \neq \emptyset$.

[(D) $\Rightarrow$ AC] $\quad A := \{\langle x, \lambda \rangle : \lambda \in I \wedge x \in A_\lambda\}$

$f : A \longrightarrow I$ ist surjektiv

$\langle x, \lambda \rangle \longmapsto \lambda$



3. (a), (c), (d) wurden bewiesen

(b) $\underset{\lambda}{\omega} \underset{<}{<} \underset{\kappa}{2^\omega}$, aber $\underbrace{(2^\omega)^{2^\omega}}_{\kappa^\kappa} = 2^{\overbrace{\omega \cdot 2^\omega}^{= 2^\omega \cdot 2^\omega = 2^\omega}} = 2^{2^\omega} = \underbrace{\omega^{2^\omega}}_{\lambda^\kappa}$

4. (a), (b), (d) wurden in den Übungen [Serie 7] gezeigt.

(c) widerspricht (a) & (b).

5. $C_{12} \cong C_4 \times C_3$ $\quad$ $C_{25} \times C_9 \times C_{12}$ hat kein Element der Ordnung 27.

$C_{225} \cong C_{25} \times C_9$

$C_{300} \cong C_{25} \times C_{12}$

6. $131 = 1\cdot 88 + 43$

$88 = 2\cdot 43 + 2$

$43 = 21\cdot 2 + 1$

$2 = 2\cdot 1 + 0$

		1	2	21	2
0	1	1	3	64	131
1	0	1	2	43	88
+	−	+	−	+	

$43\cdot 131 - 64\cdot 88 = +1$

$\Rightarrow \overline{88}^{-1} = \overline{-64} = \overline{67}$ also (d)

7. (a) p prim $\Rightarrow \mathbb{Z}_p^*$ zyklisch

(b) $ggT(7,15) = 1$, $\varphi(15) = 2\cdot 4 = 8$, $7^{k\cdot\varphi(15)} \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{15}$

also ist $7^{121} \equiv 7\cdot 7^{120} \equiv 7 \pmod{15}$

(c) $\varphi(10) = 1\cdot 4 = 4$, $\mathbb{Z}_{10}^* = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{7}, \overline{9}\}$

$\overline{3}^2 = \overline{9}$, $\overline{3}^3 = \overline{7}$, $\overline{3}^4 = \overline{1}$, also ist $\mathbb{Z}_{10}^* = \langle\overline{3}\rangle$

(d) 31 ist prim; $\varphi(31) = 30$, $3^{121} = 3^{4\cdot\varphi(31)}\cdot 3 \equiv 3 \pmod{31}$

$\not\equiv 1 \pmod{31}$

8. (c) $\dfrac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots$

$$\Rightarrow \frac{z^2}{(1-z)^2} = z^2 + 2z^3 + 3z^4 + \ldots \neq \underbrace{z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots}_{=\sum_{n\in\mathbb{N}} nz^n}$$

Bsp. (a): $$D_{log}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n\right) = D_{log}\left(\frac{1}{1-z}\right) = (1-z)\cdot\left(\underbrace{1 + 2z + 3z + \ldots}_{=\frac{1}{(1-z)^2}}\right) = \frac{1}{1-z}$$

---

12. $\underset{p\cdot q}{155 = 5\cdot 31} \Rightarrow \varphi(155) = \varphi(p\cdot q) = (p-1)\cdot(q-1) = 120$ (+2)

$117^{\varphi(155)} \equiv 1 \pmod{155}$ bzw. $117^{k\cdot\varphi(m)+1} \equiv 49 \pmod{155}$

$(117^{13})^m = 117^{13\cdot m}$ also muss gelten $13\cdot m \equiv 1 \pmod{\overset{=120}{\varphi(155)}}$ (+3)

$120 = 9\cdot 13 + 3$

$13 = 4\cdot 3 + 1$ (+1)

$3 = 3\cdot 1 + 0$

		9	4	3
0	1	9	37	120
1	0	1	4	13
+	−	+	−	

$4\cdot 120 - 37\cdot 13 = -1$

also ist $37\cdot 13 \equiv 1 \pmod{120}$

und es ist $\underline{\underline{m = 37}}$

(+2)

[es gilt auch $(117^{13})^{97} \equiv 117 \pmod{155}$]

[8]

9. f_1 1-stellig, f_2 2-stellig

$$\left.\begin{array}{c} c_1 \neq c_2, \quad f_2 c_1 c_1 = c_2, \quad f_2 c_2 c_2 = c_1 \\ f_1 x \neq f_2 x x \end{array}\right\} \Rightarrow f_1 c_1 \neq c_2 \wedge f_1 c_2 \neq c_1$$

(a) • ψ besagt "f_2 ist symmetrisch" und $x \neq y \Rightarrow f_2 xy \notin \{x,y\}$

• φ besagt "es gibt höchstens 2 versch. Objekte" (+1)

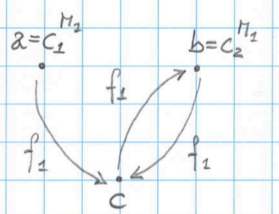
• Aus $c_1 \neq c_2$ folgt, dass es mind. 2 versch. Objekte gibt. (+1)

• $T+\varphi$ besagt "es gibt genau zwei versch. Objekte"

• $T+(\varphi \wedge \psi)$: $f_2 c_1 c_2 \neq c_1$ und $f_2 c_1 c_2 \neq c_2$

$\Rightarrow$ es gibt mind. 3 Objekte ↯ zu φ [4]

(b) M_1:

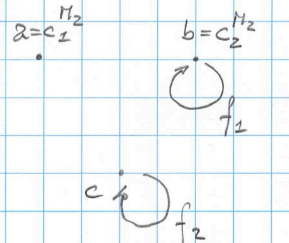


mit $f_2 cc = a$

f_2 symmetrisch und $f\,ab = c$
$f\,bc = a$
...

(+2)

M_2:

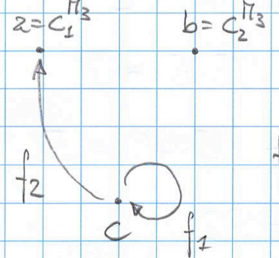


$f_1 b = b$

$f_2 cc = c$

(+1)

M_3:



$f_2 cc = a$

$f_1 c = c$

(+1)

[4]

10. (a) Adjazenzmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A richtig (+1)

A^2: 2. Zeile

$1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 0\cdot 3 = 10$

$1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 3 = 5$

$0\cdot 2 + 2\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 3 = 5$

$2\cdot 2 + 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 3 = 9$

2. Zeile von A^2 genügt

oder 4. Spalte

$1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 0\cdot 1 + 2\cdot 0 = 5$

$2\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 3\cdot 0 = 9$

$3\cdot 2 + 1\cdot 3 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 9$

$0\cdot 2 + 0\cdot 3 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 = 1$

4. Spalte von A^2 genügt auch

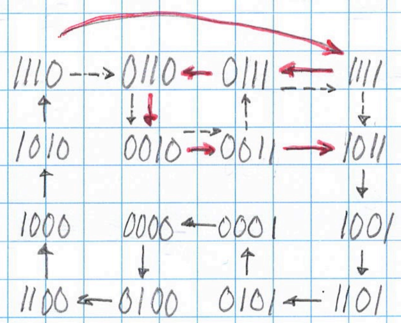
Pfeilfolgen ② → ④ : $(10, 5, 5, 9) \cdot \underbrace{(2, 3, 1, 0)}_{\text{4. Spalte von A}} = 20 + 15 + 5 + 0 = \underline{\underline{40}}$

$a_{2,4}$ von A^3 (+1)

$\underbrace{(2, 1, 2, 3)}_{\text{2. Zeile von A}} \cdot (5, 9, 9, 1) = 10 + 9 + 18 + 3 = \underline{\underline{40}}$

[4]

(b)



(+2)

1. Lösung	2. Lösung
1111	0110
0111	0010
0110	0011
0010	0111
0011	1111
(+1)	(+1)

[4]

11. $133 = 1\cdot 105 + 28$

$105 = 3\cdot 28 + 21$

$28 = 1\cdot 21 + 7$

$21 = 3\cdot 7 + 0$ (+2)

		1	3	1	3
0	1	1	4	5	19
1	0	1	3	4	15
+	−	+	−	+	

$4\cdot 19 - 5\cdot 15 = 1 \quad \| \cdot 7$

$133\cdot 4 - 105\cdot 5 = 7 \quad \| \cdot 8$

$133\cdot 32 - 105\cdot 40 = 56$ (+3)

$133 = 19\cdot 7$

$105 = 15\cdot 7$

$x_{part.} = 32 \qquad y_{part.} = 40$

$133\cdot 15 - 105\cdot 19 = 0$

$x_{hom.} = 15 \qquad y_{hom.} = 19$ (+1)

$133\cdot 15k - 105\cdot 19k = 0$

$32 + k\cdot 15 \geq 500 \Rightarrow k = 32, \quad k\cdot 15 = 480$

$\Rightarrow x = 32 + 32\cdot 15 = \underline{\underline{512}} \quad ; \quad y = 40 + 32\cdot 19 = \underline{\underline{648}}$ (+2) [8]