Prof. Dr. Lorenz Halbeisen

Grundstrukturen

120 Minuten

Die Prüfung besteht aus 8 MC-Aufgaben zu je 2 Punkten und aus 4 offenen Fragen zu je 8 Punkten. Bei den MC-Aufgaben ist jeweils eine Antwort richtig. Bei den offenen Fragen gibt es natürlich auch Punkte für richtige Zwischenschritte.

---

1. formale Logik. Sei T eine $\mathscr{L}$-Theorie und sei σ ein $\mathscr{L}$-Satz.
Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(A) Gilt $\mathsf{T} \vdash \sigma$, so ist σ in jedem Modell $\mathbf{M} \models \mathsf{T}$ wahr.

(B) Ist σ in jedem Modell $\mathbf{M} \models \mathsf{T}$ wahr, dann gilt $\mathsf{T} \vdash \sigma$.

(C) Gilt $\mathsf{T} \nvdash \sigma$, dann ist σ in jedem Modell $\mathbf{M} \models \mathsf{T}$ falsch.

(D) Gilt $\mathsf{T} \nvdash \sigma$, dann ist gibt es kein Modell $\mathbf{M} \models \mathsf{T}$ in dem $\neg\sigma$ wahr ist.

(a) (A), (B), (C)

(b) (A), (B), (D)

(c) (B), (D)

(d) (A), (B)

---

2. Auswahlaxiom. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zum Auswahlaxiom?

(A) Jede Menge kann wohlgeordnet werden.

(B) Cartesische Produkte nicht-leere Mengen sind nicht leer.

(C) Sind A und B nicht-leere Mengen und existiert eine Surjektion $f : A \to B$, so existiert auch eine Injektion $g : B \to A$ für die gilt $f\big(g(b)\big) = b$ (für alle $b \in B$).

(D) Jede Familie von paarweise *disjunkten* nicht-leeren Mengen hat eine Auswahlfunktion.

(a) (A), (B), (D)

(b) (A), (B), (C), (D)

(c) (A), (C), (D)

(d) (B), (C)

---

3. Kardinalzahlen. Seien λ und κ unendliche Kardinalzahlen mit $\lambda < \kappa$.
Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

(a) $\sum_{n\in\omega} \kappa^n = \kappa$

(c) $\kappa + \lambda = \kappa$

(b) $\kappa^\kappa > \lambda^\kappa$

(d) $\lambda^\kappa = 2^\kappa$

---

4. Bäume. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, ungerichteter Graph mit $n + 1$ Knoten. Welche der folgenden Aussagen ist *nicht* äquivalent zur Aussage "*G ist ein Baum*"?

(a) G ist zusammenhängend und hat n Kanten

(b) G ist kreisfrei, aber wenn wir eine neue Kante hinzufügen, so entsteht ein Kreis.

(c) G ist kreisfrei und hat $n + 1$ Kanten.

(d) G ist zusammenhängend, aber wenn wir irgendeine Kante löschen, so ist G unzusammenhängend.

---

5. zyklische Gruppen. Die Gruppe

$$C_{25} \times C_9 \times C_{12}$$

ist *nicht* isomorph zur Gruppe:

(a) $C_{25} \times C_{27} \times C_4$

(c) $C_{225} \times C_{12}$

(b) $C_{25} \times C_9 \times C_4 \times C_3$

(d) $C_{300} \times C_9$

---

6. endliche Körper. Im Körper $\mathbb{F}_{131}$ ist $\overline{88}^{-1}$ gleich:

(a) $\overline{87}$

(b) $\overline{77}$

(c) $\overline{57}$

(d) $\overline{67}$

---

7. Ringe. Welche der folgenden Aussage ist falsch?

(a) Die multiplikative Gruppe von $\mathbb{Z}_{31}$ ist zyklisch.

(b) $7^{121} \equiv 7 \pmod{15}$

(c) Die multiplikative Gruppe von $\mathbb{Z}_{10}$ ist zyklisch.

(d) $3^{121} \equiv 1 \pmod{31}$

---

8. formale Potenzreihen. Welche der folgenden Gleichungen ist falsch?

(a) $D_{\log}\big(\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$

(b) $\prod_{k\in\mathbb{N}}(1+z^{2^k}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$

(c) $\dfrac{z^2}{(1-z)^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} nz^n$

(d) $\dfrac{1}{(1-z^2)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^{2n}$

---

9. *Logik.* Sei $\mathscr{L} = \{\mathtt{c}_1, \mathtt{c}_2, \mathtt{f}_1, \mathtt{f}_2\}$ eine Signatur, wobei $\mathtt{c}_1$ und $\mathtt{c}_2$ zwei Konstantensymbole sind, $\mathtt{f}_1$ ein 1-stelliges Funktionssymbol und $\mathtt{f}_2$ ein 2-stelliges Funktionssymbol ist. Weiter sei T eine $\mathscr{L}$-Theorie, welche wie folgt definiert ist:

$$\mathsf{T} = \Big\{\mathtt{c}_1 \neq \mathtt{c}_2,\ \mathtt{f}_2\mathtt{c}_1\mathtt{c}_1 = \mathtt{c}_2,\ \mathtt{f}_2\mathtt{c}_2\mathtt{c}_2 = \mathtt{c}_1,\ \forall x(\mathtt{f}_1 x \neq \mathtt{f}_2 xx)\Big\}$$

Schliesslich sei φ die Formel

$$\forall x(x = \mathtt{c}_1 \lor x = \mathtt{c}_2)$$

und ψ sei die Formel

$$\forall x\, \forall y\big(\mathtt{f}_2 xy = \mathtt{f}_2 yx \land (x \neq y \to \mathtt{f}_2 xy \neq x)\big).$$

(a) Zeige, dass $\mathsf{T} + (\varphi \land \psi)$ kein Modell besitzt (d. h. $\mathsf{T} + (\varphi \land \psi)$ ist inkonsistent).

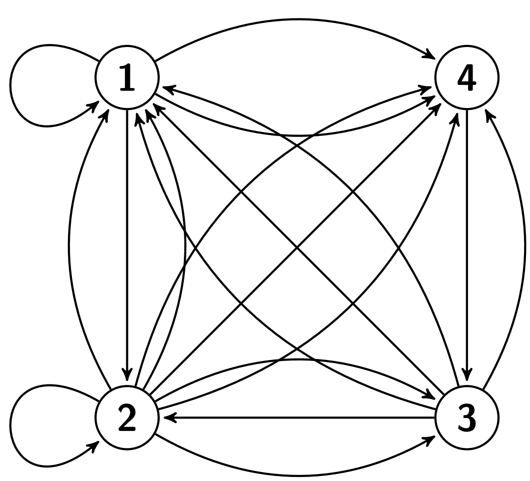
(b) Konstruiere *drei* Modelle $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ von $\mathsf{T} + \psi$ mit dem Bereich $\{a, b, c\}$, sodass gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_1 &\models \forall x(\mathtt{f}_1 x \neq x)\\
\mathbf{M}_2 &\models \exists x(\mathtt{f}_1 x = x) \land \exists x(\mathtt{f}_2 xx = x)\\
\mathbf{M}_3 &\models \exists x(\mathtt{f}_1 x = x) \land \forall x(\mathtt{f}_2 xx \neq x)
\end{aligned}$$

---

10. *Graphentheorie.*

(a) Gegeben sei der folgende Digraph:



Wie viele verschiedene Pfeilfolgen der Länge 3 gibt es vom Knoten 2 zum Knoten 4?

(b) Vervollständige die folgende (unvollständige) zyklische Folge zu einem Gray-Code, und zwar auf alle möglichen Arten:

$$\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 \\
. & . & . & . \\
. & . & . & . \\
. & . & . & . \\
. & . & . & . \\
. & . & . & . \\
1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

---

11. *Modulorechnen.* Finde die kleinste positive, ganzzahlige Lösung x, y (d. h. $x+y$ minimal) mit $x \geq 500$ der Gleichung

$$133\,x - 105\,y = 56.$$

---

12. *Gruppentheorie.* Finde eine ganze Zahl m mit $1 \leq m \leq 155$ für die gilt:

$$(117^{13})^m \equiv 117 \pmod{155}$$

Hinweis: Euler'scher Satz.
