Musterlösung Serie 17

KÖRPERERWEITERUNGEN UND ZERFÄLLUNGSKÖRPER

---

87. Sei K ein Körper und $P = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ ein Polynom mit Koeffizienten in K. Wir schreiben $P = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$. Beweisen Sie die Vieta Formel

$$a_k = (-1)^k \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k}$$

für alle $1 \leqslant k \leqslant n$ wobei die Indizes $1 \leqslant i_j \leqslant n$ durchlaufen.

Lösung: Wir beweisen die Formel mit Induktion über n. Falls $n = 0$, dann gibt es nichts zu beweisen. Falls $n = 1$, dann kann die Formel verifiziert werden. Wir nehmen an, die Formel sei für ein $n \geqslant 1$ bewiesen. Sei

$$P = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)(x-\alpha_{n+1}) = x^{n+1} + a_nx^n + \ldots + a_0$$

und

$$Q = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0.$$

Dann gilt $(x-\alpha_{n+1})Q = P$. Dies impliziert nun mithilfe der Induktionshypothese

$$a_1 = b_1 - \alpha_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i.$$

Weiters folgt daraus

$$a_{n+1} = -b_n\alpha_{n+1} = (-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n+1} \alpha_i.$$

Nun erhalten wir

$$b_{k+1} - \alpha_{n+1}b_k = a_{k+1}.$$

für alle $0 < k < n$. Die Induktionshypothese gibt uns nun

$$a_{k+1} = (-1)^{k+1} \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_{k+1}\leqslant n} \alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_{k+1}} + (-1)^{k+1}\alpha_{n+1} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} \alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_k}.$$

Dies entspricht den Vieta Formeln weil wir haben

$$\begin{aligned}\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_{k+1}} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_{k+1}} &= \sum_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_{k+1}\\ i_{k+1}\neq n+1}} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_{k+1}} + \sum_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_{k+1}\\ i_{k+1}=n+1}} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_{k+1}}\\ &= \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_{k+1}\leqslant n} \alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_{k+1}} + \alpha_{n+1} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} \alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_k}\end{aligned}$$

88. Seien a, b, c die drei Nullstellen des Polynoms $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Berechnen Sie das Minimalpolynom von b über $\mathbb{Q}(a)$.

(b) Berechnen Sie das Minimalpolynom von c über $\mathbb{Q}(a, b)$.

Lösung:

(a) Wir nehmen an, dass Polynom $x^3 - 2$ ist reduzibel über $\mathbb{Q}$. Dann müsste man das Polynom als Produkt von einem Linearfaktor und einem Polynom zweiten Grades schreiben können. Insbesondere hätte dann dieses Polynom eine Nullstelle. Dies kann jedoch nicht sein, weil man mit der Eindeutigkeit der Primfaktorisierung beweisen kann, dass keine dritte Wurzel von 2 in $\mathbb{Q}$ existiert. Also hat die Erweiterung $\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}$ Grad 3. Wir bemerken an dieser Stelle, das $\mathbb{Q}(a)$ existiert, weil man diesen Körper als Unterkörper von $\mathbb{C}$ konstruieren kann.
Wir erhalten durch Polynomdivision

$$x^3 - 2 = (x - a)(x^2 + ax - a^2).$$

Die Diskriminante des Polynoms $x^2 + ax - a^2$ ist $-3a^4$. Wir nehmen an, es existiert $z \in \mathbb{Q}(a)$ mit $z^2 = -3a^4$. Dann existiert $z' \in \mathbb{Q}(a)$ mit $z^2 = -3$. Wir betrachten die Erweiterungen $\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}$. Die Erweiterung $\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}$ hat Grad 2, also teilt 2 den Grad von $\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}$. Dies ist ein Widerspruch. Also existiert keine Wurzel der Diskriminante in $\mathbb{Q}(a)$. Die Mitternachtsformel besagt nun, dass $x^2 + ax - a^2$ keine Nullstelle in $\mathbb{Q}(a)$ hat. Also ist dieses Polynom irreduzibel und b ist eine Nullstelle dieses Polynoms. Also ist es das Minimalpolynom, denn es ist monisch.

(b) Die Mitternachtsformel impliziert, dass eine Zahl $z \in \mathbb{Q}(a, b)$ mit $z^2 = -3a^4$ und

$$b = \frac{-a + z}{2}$$

existiert. Also ist eine Nullstelle von $x^2 + ax - a^2$ gegeben durch b. Nun gibt uns die Mitternachtsformel eine Formel für die zweite Nulstelle

$$c = \frac{-a - z}{2}.$$

Also gilt $c \in \mathbb{Q}(a, b)$. Somit ist das Minimalpolynom $x - c$.

89. Sei ξ eine Nullstelle der Polynoms $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Bestimmen Sie die Minimalpolynome der anderen drei Nullstellen über $\mathbb{Q}(\xi)$.

Lösung: Dieses Polynom teilt $x^5 - 1$. Also sind die vier Nullstellen (in $\mathbb{C}$) gegeben durch $e^{2\pi ij/5}$ mit $1 \leqslant j \leqslant 4$. Sei ξ eine Nullstelle des Polynoms $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Dann gilt

$$\xi = e^{2\pi i j_0/5}$$

für ein $1 \leqslant j_0 \leqslant 4$. Sei $1 \leqslant j_1 \leqslant 4$. Da $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ein Körper ist, existiert ein $\tilde{j}_1$ und ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass

$$\tilde{j}_1 j_0 = j_1 + 5k.$$

Also gilt

$$\xi^{\tilde{j}_1} = e^{2\pi i \tilde{j}_1 j_0/5} = e^{2\pi i(j_1+5k)/5} = e^{2\pi i j_1/5} = \xi^{j_1}.$$

Also folgt nun $\xi^{j_1} \in \mathbb{Q}(\xi)$. Das Minimalpolynom von ξ^{j_1} ist $x - \xi^{j_1}$.

90. Sei $P = x^3 + 3px + 2q \in \mathbb{Q}[x]$ ein kubisches Polynom. Finden Sie eine Formel für die Nullstellen von P in Abhängigkeit von p und q.

Hinweis: Lösen Sie die Gleichung $P(x) = 0$ mithilfe der Substitution $x = w - \frac{p}{w}$.

Lösung: Wir betrachten zuerst den Fall $p \neq 0$. Sei $x \in \mathbb{C}$ mit $P(x) = 0$. Dann besagt die Mitternachtsformel, dass ein $w \in \mathbb{C}$ existiert mit $w \neq 0$ und $x = w - \frac{p}{w}$. Weiters gilt

$$0 = P\left(w - \frac{p}{w}\right) = \frac{w^6 + 2qw^3 - p^3}{w^3}.$$

Wir definieren $v := w^3$. Aus $w \neq 0$ folgt

$$v^2 + 2qv - p^3 = 0.$$

Die Mitternachtsformel besagt nun, dass eine Wurzel von $q^2 + p^3$ existiert mit

$$v = -q + \sqrt{q^2 + p^3}.$$

Also existiert nun eine dritte Wurzel von v mit

$$w = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}.$$

Also erhalten wir

$$x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} - \frac{p}{\sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}}.$$

Indem man nun das ganze Argument "rückwärts" führt, erhält man, dass jede Zahl der obigen Form auch eine Lösung ist, wenn mann alle dritten und zweiten Wurzeln "gleich" zieht.

Sei $p = 0$. Dann gilt $P = x^3 + 2q$. Also sind die Nullstellen $P(x) = 0$ gegeben durch

$$x = \sqrt[3]{-2q}.$$