Musterlösung Serie 23

HAUPTSATZ DER GALOISTHEORIE I

---

115. Sei L der Zerfällungskörper von $X^4 - 4$ über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie alle Zwischenkörper K mit $\mathbb{Q} \subsetneq K \subsetneq L$.

Lösung: Es ist $X^4 - 4 = (X^2 - 2)(X^2 + 2)$, und daher $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$. Nach Aufgabe 113 ist $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q}) \leqslant S_2 \times S_2$. Wegen $|\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})| = [L : \mathbb{Q}] = 4$ folgern wir $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q}) \cong S_2 \times S_2 \cong C_2 \times C_2$. Die Klein'sche Vierergruppe hat genau drei nichttriviale Untergruppen. Die Erweiterung hat also nach dem Hauptsatz der Galoistheorie genau drei echte Zwischenkörper. Es sind dies $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}i)$ und $\mathbb{Q}(i)$.

116. Sei $f \in K[X]$ irreduzibel und separabel und sei L ein Zerfällungskörper von f über K. Zeigen Sie: Falls die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L : K)$ abelsch ist, dann ist $L = K(a)$ für eine beliebige Nullstelle $a \in L$ von f.

Lösung: Wir stellen zunächst fest, dass $L : K$ galoissch ist, da L ein Zerfällungskörper eines separablen Polynoms über K ist. Aus dem gleichen Grund ist $L : K(a)$ galoissch. Nach Definition ist $\mathrm{Gal}(L : K(a))$ die Untergruppe aller $\gamma \in \mathrm{Gal}(L : K)$ mit $\gamma|_{K(a)} = id_{K(a)}$, oder äquivalent $\gamma(a) = a$.

Sei $a' \in L$ eine zweite Nullstelle von f. Nach Aufgabe 113 existiert ein $\delta \in \mathrm{Gal}(L : K)$ mit $\delta(a) = a'$.

Für jedes $\gamma \in \mathrm{Gal}(L : K(a))$ gilt nun $\gamma(a) = a$. Da $\mathrm{Gal}(L : K)$ abelsch ist, gilt ausserdem $\gamma \circ \delta = \delta \circ \gamma$ und folglich $\gamma(a') = \gamma(\delta(a)) = \delta(\gamma(a)) = \delta(a) = a'$. Variieren wir a', so sehen wir, dass γ jede Nullstelle von f auf sich abbildet. Da L von diesen Nullstellen über K erzeugt wird, ist γ auf ganz L die Identität. Also ist $\mathrm{Gal}(L : K(a))$ die triviale Untergruppe von $\mathrm{Gal}(L : K)$. Wegen $|\mathrm{Gal}(L : K(a))| = [L : K(a)]$ folgt also $[L : K(a)] = 1$ und somit $L = K(a)$.

117. Sei L_f der Zerfällungskörper von $f = X^3 - 3$ über $\mathbb{Q}$.

(a) Beweisen Sie: $L_f = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{3}i)$.

(b) Finden Sie ein $\alpha \in L_f$ mit $\mathbb{Q}(\alpha) = L_f$ und bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.

(c) Finden Sie einen Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq M \subseteq L_f$ mit $\mathrm{Gal}(L_f : M) \cong C_2$.

Lösung: (a) Sei $\xi := e^{\frac{i2\pi}{3}}$ und $\beta := \sqrt[3]{3}$. Weil L_f Zerfällungskörper von f ist, sind $\beta, \beta\xi, \beta\xi^2$ in L_f. Also sind auch $\beta\xi - \beta\xi^2 = \beta(\xi - \xi^2) = \beta \cdot \sqrt{3}i$ und $\frac{1}{\beta}$ in L_f. Somit ist auch $\sqrt{3}i \in L_f$ und es gilt $\mathbb{Q}(\beta, \sqrt{3}i) \subseteq L_f$.

Umgekehrt ist mit $\sqrt{3}i \in \mathbb{Q}(\beta, \sqrt{3}i)$ auch $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} = \xi \in \mathbb{Q}(\beta, \sqrt{3}i)$. Somit sind auch $\beta, \beta\xi, \beta\xi^2 \in \mathbb{Q}(\beta, \sqrt{3}i)$ und es gilt $L_f \subseteq \mathbb{Q}(\beta, \sqrt{3}i)$.

(b) Weil $[L_f : \mathbb{Q}] = 6$, muss das Minimalpolynom von α den Grad 6 haben. Sei $\xi := e^{\frac{i2\pi}{3}}$, $\beta := \sqrt[3]{3}$, $\gamma := \sqrt{3}i$, und sei $\alpha := \beta\xi + \gamma$. Dann ist

$$g := \big(X - (\beta \pm \gamma)\big)\big(X - (\beta\xi \pm \gamma)\big)\big(X - (\beta\xi^2 \pm \gamma)\big) = \\ 36 + 54X + 27X^2 - 6X^3 + 9X^4 + X^6$$

ein normiertes Polynom in $\mathbb{Q}[X]$ vom Grad 6 mit $g(\alpha) = 0$, und somit ist g das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$. Da mit (a) ξ, β, γ in L_f sind ist $L_g = L_f$ und es gilt $\mathbb{Q}(\alpha) = L_f$.

(c) Für $M = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ ist $3 = [M : \mathbb{Q}]$ weil das Minimalpolynom $X^3 - 3$ von $\sqrt[3]{3}$ über $\mathbb{Q}$ den Grad 3 hat. Weiter ist

$$[M : \mathbb{Q}] = \frac{[L_f : \mathbb{Q}]}{[L_f : M]} = \big[\mathrm{Gal}(L_f : \mathbb{Q}) : \mathrm{Gal}(L_f : M)\big],$$

und weil $\mathrm{Gal}(L_f : \mathbb{Q}) = 6$, ist $\mathrm{Gal}(L_f : M) = 2$.

118. Sei L_f der Zerfällungskörper von $f = X^5 - 1$ über $\mathbb{Q}$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Gal}(L_f : \mathbb{Q})$.

(b) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper M mit $\mathbb{Q} \subsetneq M \subsetneq L_f$.

(c) Sei $\xi := e^{\frac{2\pi i}{5}}$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\xi + \xi^4$ über $\mathbb{Q}$.

Lösung: (a) Weil $f = (X - 1)(1 + X + X^2 + X^3 + X^4)$ und weil $(X - 1) \in \mathbb{Q}[X]$ und $(1 + X + X^2 + X^3 + X^4)$ irreduzibel ist (siehe Aufgabe ???), ist $|\,\mathrm{Gal}(L_f : \mathbb{Q})| = 4$. Sei $\xi := e^{\frac{2\pi i}{5}}$. Dann sind für $1 \leqslant i \leqslant 4$, $\alpha_i : L_f \to L_f$ mit $\alpha_i : \xi \mapsto \xi^i$ vier verschiedene Automorphismen, und weil $\mathrm{ord}(\alpha_1) = 4$ ist $\mathrm{Gal}(L_f : \mathbb{Q}) = \langle\alpha_1\rangle$, d. h. $\mathrm{Gal}(L_f : \mathbb{Q}) \cong C_4$.

(b) Die Einzige nicht-triviale Untergruppe von $\mathrm{Gal}(L_f : \mathbb{Q})$ ist $\langle\alpha_1^2\rangle$. Somit ist $M_0 := L_f^{\langle\alpha_1^2\rangle}$ der einzige nicht-triviale Zwischenkörper und weil $\alpha_1^2 : \xi \leftrightarrow \xi^4$ und $\alpha_1^2 : \xi^2 \leftrightarrow \xi^3$ (d. h. die Elemente werden vertaucht), ist $M_0 = \mathbb{Q}(\xi + \xi^4) = \mathbb{Q}(\xi^2 + \xi^3)$. Beachte, dass $\xi^5 = 1$, und dass $(\xi + \xi^4)^2 = \xi^2 + 2 + \xi^3$ und $(\xi^2 + \xi^3)^2 = \xi^4 + 2 + \xi$.

(c) Da $\mathbb{Q}(\xi + \xi^4) = \mathbb{Q}(\xi^2 + \xi^3)$ und $[\mathbb{Q}(\xi + \xi^4) : \mathbb{Q}] = 2$, hat das Minimalpolynom $\xi + \xi^4$ über $\mathbb{Q}$ neben der Nullstelle $\xi + \xi^4$ auch die Nullstelle $\xi^2 + \xi^3$, und somit ist

$$\big(X - (\xi + \xi^4)\big)\big(X - (\xi 2 + \xi^3)\big) = \\ X^2 - X\big(\underbrace{\xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4}_{=-1}\big) + \big(\underbrace{\xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4}_{=-1}\big) = -1 + X + X^2$$

das Minimalpolynom von $\xi + \xi^4$ (und auch das von $\xi^2 + \xi^3$) über $\mathbb{Q}$.