Musterlösung Serie 27

DISKRIMINANTE

Dieses Aufgabenblatt behandelt die Diskriminante. Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Sei f ein Polynom und L_f der Zerfallungskörper von f über K. Sei $G := \mathrm{Gal}(f)$ die Galois-Gruppe von f. Wir betrachten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L_f$ mit

$$f = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i).$$

Dann definieren wir

$$\Delta := \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j).$$

Die *Diskriminante von* f ist gegeben durch

$$\mathrm{disc}(f) := \Delta^2.$$

Sei $L : K$ eine algebraische Erweiterung von K, $\alpha \in L$, und $g \in K[X]$ das Minimalpolnom von α über K. Wir definieren die *Diskriminante von* α als

$$\mathrm{disc}(\alpha) := \mathrm{disc}(g).$$

126. Sei f irreduzibel.

(a) Beweisen Sie, dass für jedes $\sigma \in G$ die Gleichung $\sigma(\Delta) = \pm\Delta$ gilt.

(b) Schliessen Sie aus der obigen Aufgabe $\mathrm{disc}(f) \in K$.

Lösung:

(a) Sei $\sigma \in G$, dann wirkt σ auf den Nullstellen von f. Demnach existiert $\tau \in S_n$ mit $\sigma(\alpha_i) = \alpha_{\tau(i)}$. Wir erhalten also

$$\Delta^2 = \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2 = \prod_{i<j} (\alpha_{\tau(i)} - \alpha_{\tau(j)})^2 = \prod_{i<j} (\sigma(\alpha_i) - \sigma(\alpha_j))^2 = \sigma(\Delta^2)\,.$$

Ist f inseparabel, so ist $\Delta = 0$ und $\sigma(\Delta) = 0$. Ist f separabel, so folgt mit Lemma 20.1, dass $\Delta^2 \in L_f^G = K$. Weil $\Delta \in L_f$ gilt somit $\sigma(\Delta)^2 = \sigma(\Delta^2) = \Delta^2$, d.h. $\sigma(\Delta) = \pm\Delta$.

(b) Nach Definition ist $\mathrm{disc}(f) = \Delta^2$ und in (a) wurde $\Delta^2 \in K$ gezeigt.

127. Sei f irreduzibel und separabel. Die Gruppe G wirkt auf der Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, also erhalten wir eine Injektion

$$\iota \colon G \to S_n.$$

(a) Wir erhalten aus Aufgabe 126 eine wohldefinierte Abbildung

$$\Phi\colon G \to \{\pm 1\},\ \sigma \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma(\Delta) = \Delta, \\ -1 & \text{falls } \sigma(\Delta) = -\Delta. \end{cases}.$$

Beweisen Sie die Gleichung $\Phi(\sigma) = \operatorname{sgn}(\iota(\sigma))$ für alle $\sigma \in G$.

(b) Schliessen Sie aus der obigen Aufgabe, dass $\iota[G] \subseteq A_n$ dann und nur dann falls $\operatorname{disc}(f)$ ein Quadrat in K ist.

Lösung:

(a) Sei $\tau \in S_n$ eine Permutation. Die Signatur von τ ist definiert durch die Formel

$$\prod_{i<j}(X_{\tau(i)} - X_{\tau(j)}) = \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i<j}(X_i - X_j)$$

von Polynomen über $\mathbb{Z}$. Sei $\varphi\colon \mathbb{Z} \to K$ der eindeutige Ringhomomorphismus. Dann folgt die Gleichung

$$\prod_{i<j}(X_{\tau(i)} - X_{\tau(j)}) = \varphi(\operatorname{sgn}(\tau)) \prod_{i<j}(X_i - X_j)$$

von Polynomen über K.

Sei $\sigma \in G$. In der obigen Formel setzen wir $X_i = \alpha_i$ und $\tau = \iota(\sigma)$ ein, dann erhalten wir

$$\prod_{i<j}(\alpha_{\iota(\sigma)(i)} - \alpha_{\iota(\sigma)(j)}) = \varphi(\operatorname{sgn}(\iota(\sigma))) \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j).$$

Nach Definition von $\iota(\sigma)$ haben wir $\alpha_{\iota(\sigma)(i)} = \sigma(\alpha_i)$, also besagt die obige Formel

$$\sigma(\Delta) = \prod_{i<j}(\sigma(\alpha_i) - \sigma(\alpha_j)) = \varphi(\operatorname{sgn}(\iota(\sigma))) \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j) = \varphi(\operatorname{sgn}(\iota(\sigma)))\Delta.$$

Eine Fallunterscheidung mithilfe von Aufgabe 126 (a) beweist die Gleichung

$$\sigma(\Delta) = \varphi(\Phi(\sigma))\Delta.$$

Da $\Delta \neq 0$ folgt nun

$$\varphi(\operatorname{sgn}(\iota(\sigma))) = \varphi(\Phi(\sigma)).$$

Die Annahme an die Charakteristik ist äquivalent zu $\varphi(1) \neq \varphi(-1)$, also folgt die Gleichung aus der Aufgabe.

(b) Sei $\iota[G] \subseteq A_n$. Es gilt $\sigma(\Delta) = \Delta$ für alle $\sigma \in G$ nach Aufgabe 127.(a), also folgt $\Delta \in K$ mit Lemma 20.1. Es gilt $\operatorname{disc}(f) = \Delta^2$, also ist die Diskriminante ein Quadrat in K.

Sei $\operatorname{disc}(f)$ ein Quadrat in K. Also liegen die Lösungen von $X^2 - \Delta^2$ in K, somit liegt $\Delta \in K$. Es folgt $\sigma(\Delta) = \Delta$ für alle $\sigma \in G$. Also gilt $\operatorname{sgn}(\iota(\tau)) = 1$ für alle $\sigma \in G$ und somit $\iota[G] \subseteq A_n$.