Serie 14

PRIMELEMENTE, IRREDUZIBLE ELEMENTE, UND DER RING DER POTENZREIHEN

---

73. Beweisen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen $p \in \mathbb{Z}$ gibt.

Hinweis: Nehmen Sie an, es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ und betrachten Sie die Primfaktorzerlegung von $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$.

74. Wir betrachten den Ring der Potenzreihen

$$\mathbb{C}[[t]] := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n : a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

Die Addition wird definiert durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) t^n$$

und die Multiplikation durch

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} t^n.$$

(a) Zeigen Sie, dass eine Potenzreihe $P \in \mathbb{C}[[t]]$ eine Einheit ist dann und nur dann wenn $P(0) \neq 0$.

Hinweis: Beweisen Sie die Gleichung

$$\frac{1}{1 - tP} = \sum_{n=0}^{\infty} P^n t^n$$

für alle $P \in \mathbb{C}[[t]]$.

(b) Zeigen Sie, dass für jede Potenzreihe $P \in \mathbb{C}[[t]]$ mit $P \neq 0$ eine eindeutige Einheit $u \in \mathbb{C}[[t]]$ und ein eindeutiges $k \geqslant 0$ mit $P = ut^k$ existiert. Schliessen Sie daraus, dass $\mathbb{C}[[t]]$ ein faktorieller Ring ist.

(c) Wir definieren den Ring der Laurentreihen

$$\mathbb{C}((t)) := \left\{ \sum_{n \geqslant M}^{\infty} a_n t^n : M \in \mathbb{Z}, a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

Beweisen Sie, dass der Quotientenkörper von $\mathbb{C}[[t]]$ isomorph zu $\mathbb{C}((t))$ ist.

75. Im Ring $R := \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \subset \mathbb{C}$ gilt die Gleichheit

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5}).$$

Zeige:

(a) Die Funktion $N\colon R \to \mathbb{N}, z = a + bi\sqrt{5} \mapsto |z|^2 = a^2 + 5b^2$ ist multiplikativ (das heisst, $\forall \alpha, \beta \in R : N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$).

(b) $R^* = \{u \in R \mid N(u) = 1\} = \{\pm 1\}$.

(c) Die Elemente $2, 3, 1 + i\sqrt{5}, 1 - i\sqrt{5}$ sind unzerlegbar in R.

(d) Die Elemente $2, 3, 1 + i\sqrt{5}, 1 - i\sqrt{5}$ sind keine Primelemente in R.

(e) Für das Ideal $I = (2, 1 + i\sqrt{5})$ gilt $I \cdot I = (2)$.

(f) I ist kein Hauptideal von R.

(g) I ist ein maximales Ideal von R.

(h) Kein anderes Primideal enthält die Zahl 2.

(i) R ist nicht faktoriell.