Serie 15

FAKTORIELLE RINGE

---

76. Wir betrachten den Ring

$$R := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_{n/q} t^{n/q} : q \in \mathbb{N}, q > 0, a_{n/q} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Beweisen Sie, dass R nicht faktoriell ist.

77. Beweisen Sie, dass in einem faktoriellen Ring jedes irreduzible Element ein Primelement ist.

78. Beweisen Sie, dass das Polynom $x^n - t \in \mathbb{C}[[t]][x]$ für alle $n \geqslant 1$ irreduzibel ist.

79. Sei $\mathbb{C}[x, y] := (\mathbb{C}[x])[y]$ der komplexe Polynomring in zwei Variabeln. Beweisen Sie, dass $x^2 + y^2 - 1$ irreduzibel in $\mathbb{C}[x, y]$ ist.

80. Sei $q = p^e$ eine Potenz einer Primzahl $p \in \mathbb{N}$ mit $e \geqslant 1$ und sei $r = p^{e-1}$. Wir definieren das *q-te zyklotomische Polynom* oder das *q-te Kreisteilungspolynom* als

$$\Phi_q(x) := \frac{x^q - 1}{x^r - 1} \in \mathbb{Z}[x].$$

Beweisen Sie, dass das p-te Kreisteilungspolynom Φ_p irreduzibel ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $y = x - 1$.

81. Sei R ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper K.

(a) Sei $f \in R[x]$ ein Polynom vom Grad $n > 0$, so dass

$$f = (x - a)^n + tF(x)$$

für ein irreduzibles Element $t \in R$, ein Element $a \in R$, und ein Polynom $F \in R[x]$ mit

$$F(a) \not\equiv 0 \pmod{t}.$$

Beweisen Sie, dass das Polynom f irreduzibel in $K[x]$ ist.

(b) Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Beweisen Sie die Kongruenz

$$x^p - 1 \equiv (x - 1)^p \pmod{p}$$

von Polynomen in $\mathbb{Z}[x]$ und leiten Sie mit Aufgabe (a) nochmals die Irreduzibilität des p-ten Kreisteilungspolynom Φ_p her.