Serie 16

Körpererweiterungen und Minimalpolynome

82. Sei $L : K$ eine Körpererweiterung, $a \in L$ ein Element, und $p \in K[x]$ mit $p(a) = 0$.

(a) Beweisen Sie, dass das Minimalpolynom von a über K das Polynom p teilt.

(b) Beweisen Sie, dass der Grad des Minimalpolynoms von a den Grad $[L : K]$ teilt.

83. Sei $L = K(\alpha)$ mit $\alpha \neq 0$, wobei α beim irreduziblen Polynom $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ verschwindet. Bestimmen Sie eine Formel für α^{-1}, welche die Koeffizienten a_k und α verwendet.

84. Seien $L : K$ und $M : K$ Körpererweiterungen und $a \in L$, $b \in M$ algebraisch über K. Beweisen Sie, a und b besitzen dasselbe Minimalpolynom, dann und nur dann falls ein Isomorphismus $\varphi\colon K(a) \to K(b)$ existiert mit $\varphi(a) = b$ und $\varphi|_K = \mathrm{id}$.

85. (a) Zeige: Ist eine Körpererweiterung $L : K$ endlich, so ist sie algebraisch und wird von endlich vielen Elementen erzeugt.

Bemerkung: Die andere Richtung wird in der Vorlesung gezeigt (siehe Satz 14.7.(b)).

(b) Seien $M : L$ und $L : K$ Körpererweiterungen.
Zeige: $M : K$ ist genau dann algebraisch, wenn $M : L$ und $L : K$ algebraisch sind.

86. Berechnen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ über jedem der folgenden Körper.

a) $\mathbb{Q}$

b) $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$

c) $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$

d) $\mathbb{Q}(\sqrt{15})$