Serie 16

Körpererweiterungen und Zerfallungskörper

---

87. Sei K ein Körper und $P = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$ ein Polynom mit Koeffizienten in K. Wir schreiben $P = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$. Beweisen Sie die Vieta Formel

$$a_k = (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k}$$

für alle $1 \leqslant k \leqslant n$ wobei die Indizes $1 \leqslant i_j \leqslant n$ durchlaufen.

88. Seien a, b, c die drei Nullstellen des Polynoms $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Berechnen Sie das Minimalpolynom von b über $\mathbb{Q}(a)$.

(b) Berechnen Sie das Minimalpolynom von c über $\mathbb{Q}(a, b)$.

89. Sei ξ eine Nullstelle der Polynoms $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Bestimmen Sie die Minimalpolynome der anderen drei Nullstellen über $\mathbb{Q}[\xi]$.

90. Sei $P = x^3 + 3px + 2q \in \mathbb{Q}[x]$ ein kubisches Polynom. Wir definieren die Diskriminante von P als $\varDelta := -108a^4(p^3 + q^2)$.

(a) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $P(x) = 0$ als Formel in p und q.
Hinweis: Lösen Sie die Gleichung $P(x) = 0$ mithilfe der Substitution $x = w - \frac{p}{w}$.

(b) Sei P irreduzibel und $L/\mathbb{Q}$ der Zefallungskörper von P über $\mathbb{Q}$. Beweisen Sie, dass der Grad $[L : \mathbb{Q}]$ drei ist, falls $\varDelta > 0$, und dass der Grad 6 ist, falls $\varDelta < 0$.