Serie 20

ALGEBRAISCHER ABSCHLUSS

100. (a) Sei R ein kommutativer Ring. Beweisen Sie mit dem Teichmüllerprinzip, dass jedes echte Ideal in R zu einem maximalen Ideal erweitert werden kann.
Bemerkung: Es gilt auch die Umkehrung.

(b) Beweisen Sie mit (a), dass jeder Körper einen algebraischen Abschluss besitzt.

101. Beweisen Sie die Behauptung 3 im Beweis der Existenz eines algebraischen Abschlusses. Das heisst, beweisen Sie, dass die konstruierte Erweiterung algebraisch ist.

102. Sei $L : K$ eine beliebige Körpererweiterung. Die Menge $\tilde{K}$ aller über K algebraischen Elemente von L heisst *der (relative) algebraische Abschluss von K in L*. Zeigen Sie:

(a) $\tilde{K}$ ist der eindeutige grösste Zwischenkörper von $L : K$, der algebraisch über K ist.

(b) Ist L algebraisch abgeschlossen, so ist $\tilde{K}$ ein algebraischer Abschluss von K im Sinne der Vorlesung.

(c) Gilt die Folgerung in (b) auch im Fall $\mathbb{R} : \mathbb{Q}$ (d.h. für $L = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{Q}$)?

(d) Seien $\overline{\mathbb{Q}}$ der algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$, und $\overline{\mathbb{Q}}^+$ der algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Zeige $[\overline{\mathbb{Q}} : \overline{\mathbb{Q}}^+] = 2$.

103. Sei p eine Primzahl. In dieser Aufgabe konstruieren wir einen algebraischen Abschluss von $\mathbb{F}_p$ ohne das Primidealtheorem zu verwenden.

(a) Konstruieren Sie für jedes $n \geqslant 1$ einen Körperhomomorphismus

$$\varphi_n \colon \mathbb{F}_{p^{n!}} \to \mathbb{F}_{p^{(n+1)!}}.$$

(b) Für $n \geqslant m$ definieren wir nun die Abbildung

$$\varphi_{mn} \colon \mathbb{F}_{p^{m!}} \to \mathbb{F}_{p^{n!}}$$

als die Verknüpfung $\varphi_{n-1}\varphi_{n-2}\cdots\varphi_m$ wobei $\varphi_{nn} = \mathrm{id}$. Wir definieren die Quotientenmenge

$$\overline{\mathbb{F}}_p := \left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{F}_{p^{n!}} \right) \Big/ \sim$$

wobei $\sim$ folgende Äquivalenzrelation ist: Sei $x \in \mathbb{F}_{p^{n!}}$ und $y \in \mathbb{F}_{p^{m!}}$. Dann gilt $x \sim y$ dann und nur dann falls für alle $N \geqslant \max(n, m)$ die Gleichung $\varphi_{nN}(x) = \varphi_{mN}(y)$ gilt. Konstruieren Sie eine Addition und eine Multiplikation auf $\overline{\mathbb{F}}_p$.

(c) Nehmen Sie an, dass die Menge $\overline{\mathbb{F}}_p$ mit Ihrer Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring ist. Beweisen Sie, dass $\overline{\mathbb{F}}_p$ ein Körper ist.

(d) Beweisen Sie, dass $\overline{\mathbb{F}}_p$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{F}_p$ ist.