Serie 21

NORMALE UND SEPARABLE KÖRPERERWEITERUNGEN

---

104. Sei p ein Primzahl, sei $L := \mathbb{F}_p(t)$ der Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{F}_p$ in der Variabel t (d.h. der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{F}_p[t]$), und sei $K := \mathbb{F}_p(t^p)$. Beweisen Sie: Das Polynom $X^p - t^p$ ist irreduzibel und inseparabel über K, und L ist sein Zerfällungskörper.

105. Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p$ für eine Primzahl p. Beweisen Sie: Ein irreduzibles Polynom $f \in K[X]$ ist genau dann inseparabel über K, falls $a_i \in K$ existieren so dass $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{ip}$ gilt.

106. Sei K ein Körper, $L : K$ eine Körpererweiterung, und $f \in K[X]$ ein Polynom über K. Beweisen Sie folgende universelle Eigenschaft von $R := K[X]/(f)$. Für jedes $x \in L$ existiert ein Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to L$ mit $\varphi(a) = a$ für alle $a \in K$ und $\varphi(\overline{X}) = x$ dann und nur dann falls $f(x) = 0$. Falls der Ringhomomorphismus existiert, so ist er eindeutig durch x bestimmt.

107. Sei K ein Körper und $f = X^2 + aX + b \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom über K. Sei $L := K[X]/(f)$ der Zerfallungskörper von f über K und $z := \overline{X} \in L$.

(a) Beweisen Sie die Gleichung

$$f = (X - z)(X + (z + a)).$$

(b) Konstruieren Sie einen K-Automorphismus $\sigma\colon L \to L$ mit $\sigma(z) = -z - a$. Beweisen Sie, dass σ eindeutig ist.

(c) Beweisen Sie, dass $-z - a = z$ dann und nur dann falls f inseparabel ist.

(d) Schliessen Sie aus (c), dass $\mathrm{Gal}(L : K)$ isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist, wenn f separabel ist, und isomorph zur trivialen Gruppe ist, falls f inseparabel ist.

(e) Sei K ein Körper mit Charakteristik $\neq 2$ und $\Delta := a^2 - 4b$. Beweisen Sie $L = K(\sqrt{\Delta})$ mit quadratischer Ergänzung. Bestimmen Sie $\sigma(\sqrt{\Delta})$.
Hinweis: Die Annahme an die Charakteristik ist äquivalent zur Existenz von $2^{-1} \in K$ weil $2 \neq 0$ in K. Also kann man in K durch 2 dividieren.

108. Seien $K : L : F$ Erweiterungen von Körpern mit Charakteristik $\neq 2$, so dass die Erweiterungen $K : L$ und $L : F$ Grad 2 haben. In dieser Aufgabe beweisen Sie, dass $K : F$ durch eine Wurzel eines irreduziblen Polynoms $X^4 + aX^2 + b \in F[X]$ generiert wird.

(a) Verwenden Sie quadratische Ergänzung um ein $x \in K$ mit $x \notin L$ und $x^2 \in L$ zu konstruieren.

(b) Sei $x^2 \notin F$. Beweisen Sie, dass das Minimalpolynom von x über F Grad 4 hat. Schliessen Sie $K = F(x)$.

(c) Sei $x^2 \notin F$. Sei $X^2 + aX + b$ das Minmalpolynom von x^2 über F. Schliessen Sie aus Aufgabe (b), dass das Minimalpolynom x über F das Polynom $X^4 + aX^2 + b$ ist. Schliessen Sie in diesem Fall den Beweis der Behauptung aus der Aufgabe ab.

(d) Wir nehmen von nun an $x^2 \in F$ an. Konstruieren Sie $y \in L$ mit $y \notin F$ und $y^2 \in F$.

(e) Beweisen Sie, dass $\{1, x, y, xy\}$ eine Basis des F-Vektorraums K ist. Schliessen Sie daraus, dass das Minimalpolynom von $z := x + y$ über F Grad 4 hat und $K = F(z)$ gilt.

(f) Beweisen Sie, dass $a, b \in F$ mit

$$(X - (x + y))(X - (-x + y))(X - (x - y))(X - (-x - y)) = X^4 + aX^2 + b$$

existieren. Schliessen Sie nun den Beweis der Behauptung ab.

Hinweis: Sie können das Polynom auf `wolframalpha.com` ausfaktorisieren.

109. Finden Sie ein Gegenbeispiel zu Aufgabe 107 in Charakteristik 2.

Hinweis: Betrachten Sie die Erweiterungen $\mathbb{F}_{16} : \mathbb{F}_4 : \mathbb{F}_2$.