Serie 22

GALOISGRUPPEN

110. Sei $L : K$ eine algebraische Körpererweiterung und sei $A \subseteq L$ eine Untermenge mit $L = K(A)$. Formalisieren und beweisen Sie folgende Aufgabe: *Jedes Element der Galoisgruppe von $L : K$ ist durch seine Wirkung auf die Elemente in A vollständig bestimmt.*

111. Sei L_f der Zerfällungskörper von einem Polynom $f \in K[X]$ vom Grad n. Beweisen Sie die Teilungsrelation $|\mathrm{Gal}(f)| \mid n!$.

112. Sei K ein Körper mit positiver Charakteristik p. Wir betrachten das Polynom

$$P = X^p - X - a \in K[X]$$

mit $a \in K$. Sei L ein Zerfallungskörer von P über K und $\alpha \in L$ eine Nullstelle von P.

(a) Beweisen Sie die Gleichung

$$P = \prod_{x \in \mathbb{F}_p} (X - (\alpha + x)).$$

Schliessen Sie daraus, dass P separabel ist.

(b) Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(P)$. Beweisen Sie $\sigma(\alpha) - \alpha \in \mathbb{F}_p$.

(c) Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi\colon \mathrm{Gal}(P) \to \mathbb{F}_p,\ \sigma \mapsto \sigma(\alpha) - \alpha$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

(d) Beweisen Sie, dass P irreduzibel ist, dann und nur dann falls Φ ein Isomorphismus ist.

(e) Beweisen Sie, dass P reduzibel ist, dann und nur dann falls ein $g \in K$ mit $g^p - g = a$ existiert.

113. Sei $n \geqslant 1$ und K ein Körper. Wir nehmen an, es existiert eine primitive n-te Einheitswurzel $\zeta_n \in K$, das heisst $\zeta_n^n = 1$ und $\zeta_n^m \neq 1$ für alle $1 \leqslant m < n$. Wir betrachten das Polynom

$$P = X^n - a \in K[X]$$

mit $a \in K$. Sei L ein Zerfallungskörper von P über K und $\alpha \in L$ eine Nullstelle von P. Wir definieren die abelsche Gruppe der n-ten Einheitswurzeln

$$\mu_n := \{x \in K : x^n = 1\},$$

wobei die Gruppenoperation die Multiplikation ist.

(a) Beweisen Sie, dass der Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mu_n, a \mapsto \zeta_n^a$$

ein Gruppenisomorphismus ist. Wieso ist diese Abbildung nicht natürlich?

(b) Beweisen Sie die Gleichung

$$P = \prod_{\xi \in \mu_n} (X - \xi\alpha).$$

Schliessen Sie daraus, dass P separabel ist.

(c) Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(P)$. Beweisen Sie $\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} \in \mu_n$.

(d) Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi\colon \mathrm{Gal}(P) \to \mu_n, \sigma \mapsto \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

(e) Beweisen Sie, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, dann und nur dann falls P irreduzibel ist.

114. Sei K ein Körper mit positiver Charakteristik p. Wir betrachten ein irreduzibles Polynom $P = X^p - a \in K[X]$. Bestimmen Sie die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(P)$.