

Serie 23

HAUPTSATZ DER GALOISTHEORIE I

- 115.** Sei L der Zerfällungskörper von $X^4 - 4$ über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie alle Zwischenkörper K mit $\mathbb{Q} \subsetneq K \subsetneq L$.
- 116.** Sei $f \in K[X]$ irreduzibel und separabel und sei L ein Zerfällungskörper von f über K . Zeigen Sie: Falls die Galois-Gruppe $\text{Gal}(L : K)$ abelsch ist, dann ist $L = K(a)$ für eine beliebige Nullstelle $a \in L$ von f .
- 117.** Sei L_f der Zerfällungskörper von $f = X^3 - 3$ über $\mathbb{Q}$.
- (a) Beweisen Sie: $L_f = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{3}i)$.
 - (b) Finden Sie ein $\alpha \in L_f$ mit $\mathbb{Q}(\alpha) = L_f$ und bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.
 - (c) Finden Sie einen Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq M \subseteq L_f$ mit $\text{Gal}(L_f : M) \cong C_2$.
- 118.** Sei L_f der Zerfällungskörper von $f = X^5 - 1$ über $\mathbb{Q}$.
- (a) Bestimmen Sie $\text{Gal}(L_f : \mathbb{Q})$.
 - (b) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper M mit $\mathbb{Q} \subsetneq M \subsetneq L_f$.
 - (c) Sei $\xi := e^{\frac{2\pi i}{5}}$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\xi + \xi^4$ über $\mathbb{Q}$.