Serie 25

RADIKALERWEITERUNGEN UND AUFLÖSBARE GRUPPEN

---

120. Sei $L : K$ eine Radikalerweiterung in $\mathbb{C}$ und sei $\tilde{L}$ die normale Hülle von $L : K$.
Zeigen Sie: $\tilde{L} : K$ ist eine Radikalerweiterung.

121. Sei $\zeta := e^{2\pi i/p}$ für eine ungerade Primzahl p.

(a) Zeigen Sie: $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = p - 1$. (*Hinweis:* Eisenstein-Kriterium.)

(b) Zeigen Sie: $\mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}\big) \cong C_{p-1}$.

122. Zeigen Sie, dass die Nullstellen des Polynoms $X^5 - 6X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$ nicht durch Radikale ausdrückbar sind.

123. Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ eine normale Untergruppe.

(a) Zeigen Sie: Die Gruppe G ist auflösbar, dann und nur dann falls N und G/N auflösbar sind.

Hinweis: Vergleichen Sie mit Aufgabe 33 (a) der Serie 5.

(b) Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie: G ist genau dann auflösbar, falls eine Folge von Untergruppen $H_i \leqslant G$ existiert mit $\{e\} = H_0 \leqslant \ldots \leqslant H_n = G$, sodass für all $0 \leqslant i \leqslant n-1$ gilt:

$$H_i \trianglelefteq H_{i+1} \quad \text{und} \quad H_{i+1}/H_i \text{ ist zyklisch der Ordnung } p_i \text{ für eine Primzahl } p_i.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen.

124. (a) Zeigen Sie, dass für $n = 2, 3, 4$ die Gruppe S_n auflösbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $n \geqslant 5$, A_n die einzige normale Untergruppe von S_n ist.

(c) Zeigen Sie, dass für $n \geqslant 5$ die Gruppe S_n nicht auflösbar ist.