

## Serie 26

### DER FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA

---

**125.** In dieser Aufgabe beweisen wir den Fundamentalsatz der Algebra (der besagt, dass  $\mathbb{C}$  der algebraische Abschluss von  $\mathbb{R}$  ist) mit Hilfe der Galoistheorie.

Sei  $L : \mathbb{R}$  eine endliche Körpererweiterung, wobei in (a)–(e) angenommen wird, dass die Körpererweiterung  $L : \mathbb{R}$  *galoissch* ist.

- (a) Zeigen Sie, dass ein sogenannter *Körperturm*  $L = L_n : \dots : L_0 : \mathbb{R}$  existiert, sodass  $[L_0 : \mathbb{R}]$  ungerade ist und für jedes  $0 \leq i \leq n-1$  die Erweiterung  $L_{i+1} : L_i$  den Grad 2 hat.
- (b) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{R}$  keine nichttriviale Erweiterung von ungeradem Grad hat.
- (c) Zeigen Sie, dass jede Erweiterung von  $\mathbb{R}$  vom Grad 2 isomorph zu  $\mathbb{C}$  ist.
- (d) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{C}$  keine Erweiterung vom Grad 2 hat.
- (e) Schliessen Sie nun, dass  $L$  isomorph zu  $\mathbb{R}$  oder zu  $\mathbb{C}$  ist.

Sei nun  $L : \mathbb{R}$  eine endliche Körpererweiterung die nicht galoissch ist.

- (f) Zeigen Sie, dass  $L$  entweder  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ist.