Serie 27

Diskriminante

Dieses Aufgabenblatt behandelt die Diskriminante. Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Sei f ein Polynom und L_f der Zerfallungskörper von f über K. Sei $G := \mathrm{Gal}(f)$ die Galois-Gruppe von f. Wir betrachten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L_f$ mit

$$f = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i).$$

Dann definieren wir

$$\varDelta := \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j).$$

Die *Diskriminante von f* ist gegeben durch

$$\mathrm{disc}(f) := \varDelta^2.$$

Sei $L : K$ eine algebraische Erweiterung von K, $\alpha \in L$, und $g \in K[X]$ das Minimalpolnom von α über K. Wir definieren die *Diskriminante von α* als

$$\mathrm{disc}(\alpha) := \mathrm{disc}(g).$$

126. Sei f irreduzibel.

(a) Beweisen Sie, dass für jedes $\sigma \in G$ die Gleichung $\sigma(\varDelta) = \pm\varDelta$ gilt.

(b) Schliessen Sie aus der obigen Aufgabe $\mathrm{disc}(f) \in K$.

127. Sei f irreduzibel und separabel. Die Gruppe G wirkt auf der Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, also erhalten wir eine Injektion

$$\iota\colon G \to S_n.$$

(a) Wir erhalten aus Aufgabe 126 eine wohldefinierte Abbildung

$$\varPhi\colon G \to \{\pm 1\},\ \sigma \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma(\varDelta) = \varDelta, \\ -1 & \text{falls } \sigma(\varDelta) = -\varDelta. \end{cases}.$$

Beweisen Sie die Gleichung $\varPhi(\sigma) = \mathrm{sgn}(\iota(\sigma))$ für alle $\sigma \in G$.

(b) Schliessen Sie aus der obigen Aufgabe, dass $\iota[G] \subseteq A_n$ dann und nur dann falls $\mathrm{disc}(f)$ ein Quadrat in K ist.