<u>Beweis:</u> $K \subseteq L \subseteq M$; seien $a, b \in M$ alg. über K.

z. zeigen: $a-b$, ab^{-1} (für $b \neq 0$) sind in L.

- Es gilt $K = K(a,b) \subseteq L$ und mit Satz 14.7.(a) ist $K(a,b) : K$ algebraisch.

Somit sind $a-b$ und ab^{-1} ($b \neq 0$) alg. über K (weil sie in $K(a,b)$ liegen), also $a-b, ab^{-1} \in L$. $\dashv$

15. Zerfällungskörper

[Zuerst beweisen wir eine Folgerung aus Satz 14.6.]

<u>Korollar 15.1</u> Es sei $f \in K[X]$ ein beliebiges Polynom vom Grad n. Dann existiert ein Erweiterungskörper L von K mit $[L:K] \leq n!$, über dem f in Linearfaktoren zerfällt.

<u>Beweis:</u> Mit Induktion über n. Für $n=1$ ist f bereits in der richtigen Form. Sei $n \geq 2$ und sei die Aussage für alle $n' < n$ bewiesen. Mit Satz 14.6 ex. eine einfache Körpererweiterung $K(a) =: K_1$ mit $f(a) = 0$ und $[K_1 : K] \leq n$, da das Min. Pol. von a das Polynom f teilt.

- In K_1 gilt $f = (X-a) \cdot g$, wobei $g \in K_1[X]$ und $\operatorname{grad}(g) = n-1 < n$.
- Nach Ind.-Vor. ex. $L \supseteq K_1$ über dem g in Linearfaktoren zerfällt. Dann zerfällt f in L in Linearfaktoren und weil mit Ind.-Vor. $[L : K_1] \leq (n-1)!$ ist, erhalten wir $[L:K] \leq n \cdot (n-1)! = n!$ $\dashv$

<u>Def.</u> Es sei $f \in K[X]$ gegeben. Der Oberkörper $L \supseteq K$ von minimalem Grad über K, über dem f in Linearfaktoren zerfällt, heisst <u>Zerfällungskörper</u> von f über K.

Der Zerfällungskörper von $f \in K[X]$ über K ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Es gilt sogar:

<u>Satz 15.2</u> Sei $f \in K[X]$ und sei L ein Zerfällungskörper von f über K. Weiter sei $\varphi: K \xrightarrow{\sim} K'$ ein Körperisom. und $L' \supseteq K'$ ein Zerfällungskörper von $\varphi f \in K'[X]$ über K'. Dann ex. ein Körperisom. $\tilde{\varphi}: L \xrightarrow{\sim} L'$ mit $\tilde{\varphi}/_K = \varphi$.

<u>Beweis:</u> Mit Induktion über dem Grad von f.

- Für $\text{grad}(f) = 1$ ist nichts zu beweisen. $(K = L, K' = L')$
- Sei $n = \text{grad}(f) > 1$. Dann zerfällt f in L in Lin.-Faktoren,
$$f = b_n(X - a_1) \cdot \ldots \cdot (X - a_n), \quad b_n \in K, a_i \in L.$$
- Es sei $h \in K[X]$ das Minimalpolynom von a_1 über K.
- Dann gilt h / f und es folgt $\varphi h / \varphi f$. Da φf in L' in Lin.-Faktoren zerfällt (φ ist ein Isom.), muss gelten:
$$\varphi h = (X - a_1') \cdot \ldots \cdot (X - a_k'), \quad a_i' \in L'. \quad (\varphi h \text{ normiert})$$
$(k \leq n)$
- Da φh irred. ist über K' (φ ist Isom.), ist φh Min.-Pol. von z.B. a_1' über K'. Mit Satz 14.4. (b) ex. ein Isom. $\bar{\varphi}: K(a_1) \xrightarrow{\sim} K'(a_1')$ mit $\bar{\varphi}|_K = \varphi$ und $\bar{\varphi}(a_1) = a_1'$.
- Nun ist L ein Zerfällungskörper von $g = f : (X - a_1)$ (Abspalten von Nullstelle) über $K(a_1)$, und $\bar{\varphi} g = \bar{\varphi}(\underbrace{f : (X - a_1)}_{= g}) = \varphi f : (X - \underbrace{a_1'}_{\bar{\varphi}(a_1)})$ zerfällt in L' in Linearfaktoren.
- Nach Ind.-Vor. ex. ein Körperisom. $\tilde{\varphi}: L \to L'$ mit $\tilde{\varphi}|_{K(a_1)} = \bar{\varphi}$.
- Somit gilt, weil $\bar{\varphi}|_K = \varphi$, $\tilde{\varphi}|_K = \varphi$ und $\tilde{\varphi}(a_1) = a_1'$.

$\dashv$