Cubische Gleichungen (mit Hudde)

Die Gleichung $Y^3+a_2Y^2+a_1Y+a_0=0$ wird durch die Substitution $X := Y+\frac{a_2}{3}$ in die Gleichung

$$X^3+pX+q=0 \qquad (*)$$

übergeführt. Setzen wir $X=u+v$, so hat $(*)$ die Form

$$\underbrace{u^3+v^3+3u^2v+3uv^2}_{=(u+v)^3}+p(u+v)+q = u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0,$$

und für $u+v$ mit $\begin{cases} u^3+v^3=-q & (1)\\ 3uv=-p & (2)\end{cases}$

ist $u+v$ eine Lösung von $(*)$. Aus (1) & (2) folgt

$(u^3-v^3)^2=(u^3+v^3)^2-4u^3v^3 = q^2+\frac{4p^3}{27}$ und somit ist

$u^3-v^3=\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}} = 2\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$. Aus $u^3, v^3 = \frac{(u^3+v^3)\pm(u^3-v^3)}{2}$

folgt $u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$ und $v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$.

[Bem. Nimmt man die Quadratwurzel mit dem entgegengesetzten Vorzeichen, so vertauschen sich u^3 und v^3.]

Wir erhalten somit:

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{und} \quad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad \binom{*}{*}$$

Aus (1) & (2) folgt somit $\binom{*}{*}$ und umgekehrt folgt aus $\binom{*}{*}$ auch (1). Dagegen folgt aus $\binom{*}{*}$ nur dann (2) wenn wir zur willkürlich gewählten 3. Wurzel u_0 von u^3 die entsprechende 3. Wurzel v_0 von v^3 wählen, sodass $u_0 v_0 = -\frac{p}{3}$: Seien $\xi := e^{2\pi i/3}$, $z_1 := u_0^3$, $z_2 := v_0^3$.

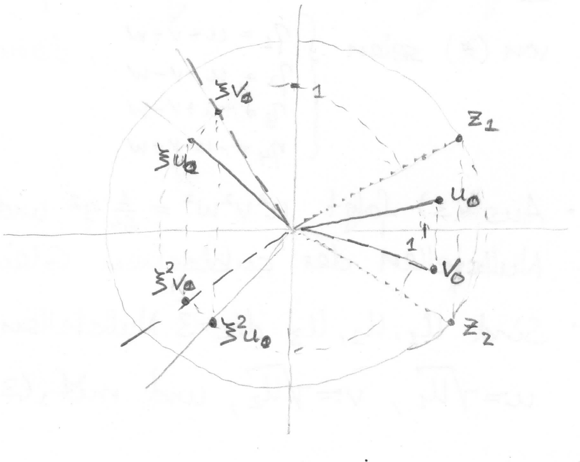
Fall I $\quad \left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$, d.h. $z_2=\overline{z_1}$.

Die 3 Lösungen von $(*)$ sind

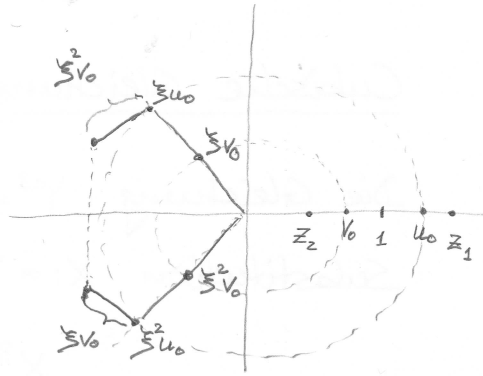
$X_1 = u_0+v_0 \quad$ mit $u_0\cdot v_0=-\frac{p}{3}$

$X_2 = \xi u_0+\xi^{-1}v_0 \quad$ mit $\xi u_0\cdot\xi^{-1}v_0 = u_0\cdot v_0$

$X_3 = \xi^{-1}u_0+\xi v_0 \quad$ mit $\xi^{-1}u_0\cdot\xi v_0=u_0\cdot v_0$



Fall II $\quad (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 > 0$, d.h. $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ und $z_1 \neq z_2$



Die 3 Lösungen von (*) sind wieder

$$X_1 = u_0 + v_0$$
$$X_2 = \xi u_0 + \xi^{-1} v_0$$
$$X_3 = \xi^{-1} u_0 + \xi v_0$$

Zusammenhang mit Galoistheorie:

$\{1\} \trianglelefteq C_3 \trianglelefteq S_3$; $\quad S_3/C_3 \cong C_2$; $\quad$ sei $\alpha_0 = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$ und $\alpha_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\alpha_0}$.

Weiter sei M der Zerf.-Körper von $X^2 - \alpha_0$ über $\mathbb{Q}$ und L der Zerf.-Körper von $X^3 - \alpha_1$ über M. Dann ist

$$\begin{array}{ll} L & \\ \downarrow & Gal(L:M) \cong C_3 \\ M & \\ \downarrow & Gal(M:\mathbb{Q}) \cong C_2 \cong S_3/C_3 \\ \mathbb{Q} & \end{array}$$

Weil $v_0 = -\frac{p}{3u_0}$ ist $\mathbb{Q}(u_0) = \mathbb{Q}(v_0) \subseteq M$, d.h. $v_0 \in \mathbb{Q}(u_0)$. Somit ist auch $X_1 = u_0 + v_0$ in $\mathbb{Q}(u_0)$ und $X_1, X_2, X_3 \in L$.

Quartische Gleichungen

Zusammenhang zur Galoistheorie:

$\{1\} \trianglelefteq C_2 \times C_2 \trianglelefteq A_4 \trianglelefteq S_4$; $\quad \underbrace{S_4/A_4 \cong C_2}_{\text{quad. Erw., d.h. adjunktion einer Quadratwurzel}}, \quad \underbrace{A_4/C_2\times C_2 \cong C_3}_{\text{cubische Erw., d.h. adj. einer 3. Wurzel}}, \quad \underbrace{C_2 \times C_2}_{\text{biquad. Erw., d.h. adj. zweier unabh. Quadratwurzeln}} (\trianglelefteq S_4)$

analog zu cubischen Gleichungen

$$Gal(L:\mathbb{Q}) \cong S_4 \left\{ \begin{array}{ll} L & \\ \downarrow & Gal(L:M) \cong C_2 \times C_2 \trianglelefteq S_4 \\ M & \\ \downarrow & Gal(M:\mathbb{Q}) \cong S_4/C_2\times C_2 \cong S_3 \\ \mathbb{Q} & \end{array} \right.$$

Zur Lösungsformel:

- Es genügt die Gleichung $X^4 + pX^2 + qX + r = 0$ (*) zu betrachten. Die Nullstellen von (*) seien $\left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = u+v+w \\ \eta_2 = u-v-w \\ \eta_3 = -u+v-w \\ \eta_4 = -u-v+w \end{array} \right.$, dann ist $\left\{ \begin{array}{lr} u^2+v^2+w^2 = -\frac{1}{2}p & (1) \\ u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2 = \frac{1}{16}p^2 - \frac{1}{4}r & (2) \\ uvw = -\frac{1}{8}q & (3) \end{array} \right.$
- Aus (3) folgt $u^2v^2w^2 = \frac{1}{64}q^2$ und mit (1) & (2) sind dann u^2, v^2, w^2 die drei Nullstellen der cubischen Gleichung $U^3 + \frac{1}{2}pU^2 + (\frac{1}{16}p^2 - \frac{1}{4}r)U - \frac{1}{64}q^2 = 0$.
- Sind U_1, U_2, U_3 die 3 Nullstellen der cubischen Gleichung, so ist $u := \sqrt{U_1}$, $v := \sqrt{U_2}$, und mit (3) ist $w = -\frac{1}{8}q \cdot \frac{1}{u \cdot v}$, womit $\eta_1, \dots, \eta_4$ bestimmt sind.