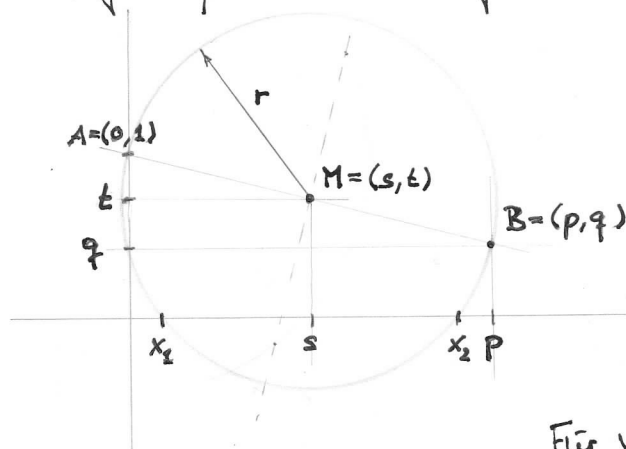


Zur Konstruktion regelmässiger n-Ecke

- Ist das regelmässige n-Eck und das regelmässige m-Eck kstb., so ist auch das regelm. k-Eck für $k = \text{kgV}(m, n)$ sowie das regelmässige $2^k \cdot n$ -Eck kstb.
- Andererseits ist das regelm. n^2 -Eck für $n > 2$ nicht kstb. Insbesondere ist das regelmässige 9-Eck nicht kstb. ($\varphi(9) = 6 \neq 2^s$). Dies zeigt, dass der Winkel $\frac{2\pi}{9}$ nicht konstruiert werden kann, bzw. dass der Winkel $\frac{2\pi}{3}$ nicht dreigeteilt werden kann.
- Um die Konstruktion eines kstb. regelm. n-Ecks herzuleiten genügt es also die Konstruktionen der regelm. p-Ecke für die bis heute bekannten Fermat-Primzahlen $p = 3, 5, 17, 257, 65537$ zu kennen. Dafür zeigen wir zuerst, wie mit Zirkel & Lineal die reellen Lösungen quadratischer Gleichungen konstruiert werden können.
- Lösungen quad. Gleichungen mit Zirkel & Lineal:



$$s = \frac{p}{2} ; \quad t = \frac{q+1}{2}$$

$$r^2 = (t - q)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2q + q^2 + p^2)$$

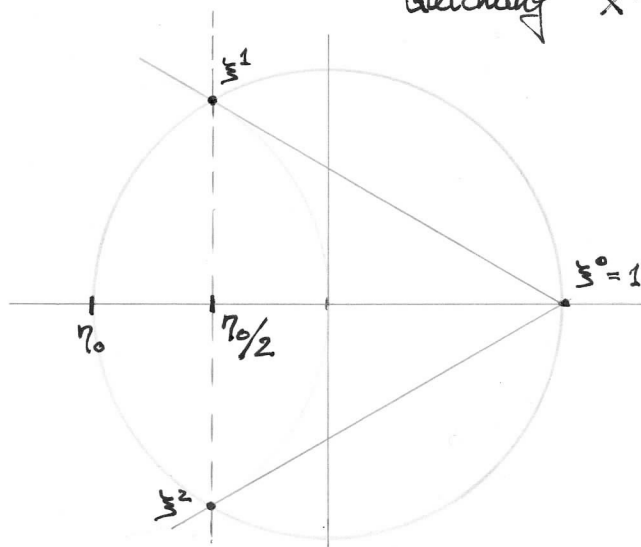
$$\text{Kreisgleichung: } (x-s)^2 + (y-t)^2 - r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - px + q + y(y - (q+1)) = 0$$

$$\text{Für } y=0 \text{ gilt: } x^2 - px + q = 0, \quad = 0 \text{ (weil } y=0)$$

d.h. x_1 & x_2 sind die reellen Lösungen der Gleichung $x^2 - px + q = 0$.

3-Eck



$$\xi := e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

$$\underline{\underline{\eta_0 = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1}}$$

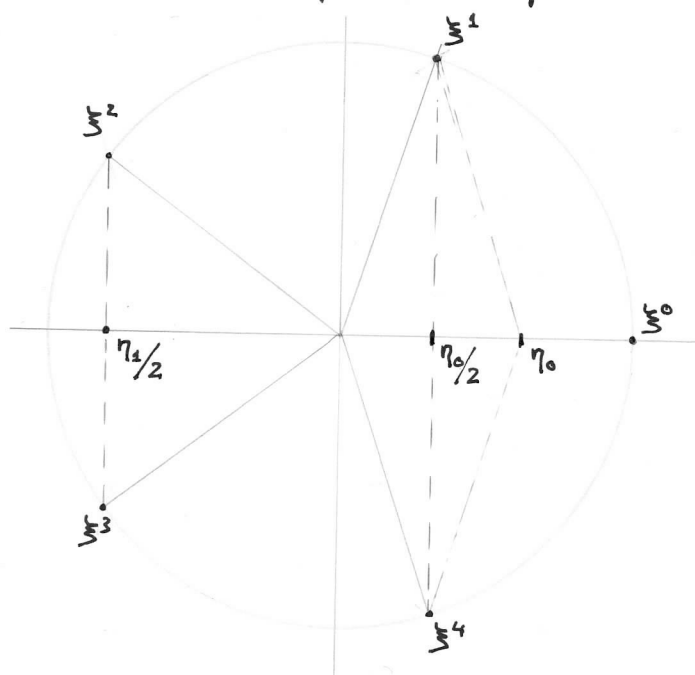
Um das 3-Eck zu konstr. genügt es η_0 zu konstruieren.

- 5-Eck Um das 5-Eck zu konstruieren genügt es $\eta_0 = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$ zu konstruieren.

$$\xi := e^{\frac{2\pi i}{5}}$$

$$\eta_0 = (\xi^1 + \xi^4) = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$$

$$\eta_1 = (\xi^2 + \xi^3) = 2\cos(\frac{4\pi}{5})$$



$$\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi):\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* \cong C_4 \text{ mit Generator } \sigma(\xi) = \xi^3:$$

$$\sigma: \xi^1 \mapsto \xi^3 \mapsto \xi^4 \mapsto \xi^2 \mapsto \xi^1$$

dargestellt durch $[1, 3, 4, 2]$. Weiter ist $\sigma^2: [1, 4]; [3, 2]$

und $\text{ord}(\sigma^2) = 2$. Für $\eta_0 := \xi^1 + \xi^4$ und $\eta_1 := \xi^3 + \xi^2$ gilt

$\sigma^2(\eta_0) = \eta_0$ und $\sigma^2(\eta_1) = \eta_1$ und somit ist $\mathbb{Q}(\xi)^{\langle \sigma^2 \rangle} = \mathbb{Q}(\eta_0) = \mathbb{Q}(\eta_1)$.

$$\mathbb{Q}(\xi) \xrightarrow{C_2} \mathbb{Q}(\eta_0) \xrightarrow{C_4/C_2 \cong C_2} \mathbb{Q}$$

$\searrow \quad \nearrow$
 C_4

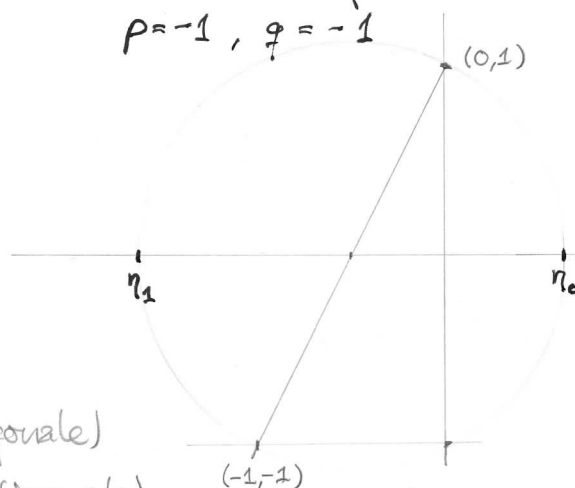
Das Minimalpolynom von η_0 & η_1 ist

$$(X - \eta_0) \cdot (X - \eta_1) = X^2 - \underbrace{(\eta_0 + \eta_1)}_{=-1} X + \underbrace{\eta_0 \eta_1}_{(*)} = X^2 + X - 1, \text{ und damit}$$

$$\text{ist } \underline{\eta_0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 2\cos(\frac{2\pi}{5})}.$$

Konstr. m. Zirkel & Lineal:

$$p = -1, q = -1$$



$$(*) \eta_0 \cdot \eta_1 = (\xi^1 + \xi^4) \cdot (\xi^3 + \xi^2) = \underbrace{\xi^1 \xi^3 + \xi^1 \xi^2}_{\xi^{1+3} + \xi^{1+2}} + \dots$$

einfacher dargestellt:

	+	3	2
η_1	1	4	3
η_0	4	2	1

$$\text{somit ist } \eta_0 \cdot \eta_1 = \eta_0 + \eta_1$$

$$\xi^4 + \xi^1 = \eta_0 \quad (\text{Summe der Diagonale})$$

$$\xi^2 + \xi^3 = \eta_1 \quad (\text{Summe der Nebendiagonale})$$

• 17-Eck (analog 257-Eck und 65'537-Eck)

Es genügt wieder $2\cos(\frac{2\pi}{17})$ zu konstruieren. Sei $\xi := e^{\frac{2\pi i}{17}}$.

$\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi):\mathbb{Q}) \cong C_{16}$ mit Generator $\sigma(\xi) = \xi^3$. [d.h. $2\cos(\frac{2\pi}{17}) = \xi^1 + \xi^{16}$]

$\sigma: [1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6]$; $\text{ord}(\sigma) = 16$

$\sigma^2: [1, 9, 13, 15, 16, 8, 4, 2]; [3, 10, 5, 11, 14, 7, 12, 6]$; $\text{ord}(\sigma^2) = 8$

$$\Sigma =: \eta_0$$

$$\Sigma =: \eta_1$$

$$\text{d.h. } \eta_0 = \xi^1 + \xi^9 + \dots + \xi^2$$

$$\underbrace{(X - \eta_0) \cdot (X - \eta_1)}_{= \text{Min. Poly. von } \eta_0 \text{ \& } \eta_1} = X^2 - \underbrace{(\eta_0 + \eta_1)}_{=-1} \cdot X + \underbrace{\eta_0 \cdot \eta_1}_{(*)} = X^2 + X - 4 = 0 \Rightarrow \underline{\eta_0 \notin \mathbb{Q}}$$

(*)

+	3	10	5	11	14	7	12	6
1	4	11	6	12	15	8	13	7
9	12	2	14	3	6	16	4	15
13	16	6	1	7	...	...	...	...
15	1	8	3	9	...	...	...	...
16	...	...	...	...	...	...	...	...
8	...	...	...	...	...	...	...	...
4	...	...	...	...	...	...	...	...
2	...	...	...	...	...	...	...	...

Diagram showing the mapping of elements to η_0 and η_1 via the Galois group action.

$$\eta_0 \cdot \eta_1 = 4 \cdot (\eta_0 + \eta_1) = -4$$

Beachte:

+	5	11
13	...	1
15	...	9

$$13 + 5 \equiv 1 \pmod{17}$$

$$15 + 11 \equiv 9 \pmod{17}$$

$$9 \cdot 13 + 9 \cdot 5 \equiv 9 \cdot 1 \pmod{17}$$

$$\mathbb{Q}(\xi) \xrightarrow{C_8} \mathbb{Q}(\eta_0) \xrightarrow{C_{16}/C_8 \cong C_2} \mathbb{Q}$$

C_{16}

$\sigma^4: [1, 13, 16, 4] =: \eta_{00}$, $[9, 15, 8, 2] =: \eta_{01}$; $[3, 5, 14, 12] =: \eta_{10}$, $[10, 11, 7, 6] =: \eta_{11}$

$$(X - \eta_{00}) \cdot (X - \eta_{01}) = X^2 - \underbrace{(\eta_{00} + \eta_{01})}_{=\eta_0} \cdot X + \underbrace{\eta_{00} \cdot \eta_{01}}_{(*)} = X^2 - \eta_0 X - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\eta_{00} \notin \mathbb{Q}}$$

(*)

+	9	15	8	2
1	10	16	9	3
13	5	11	4	15
16	8	14	7	1
4	13	2	12	6

Diagram showing the mapping of elements to η_{00} , η_{11} , η_{10} , and η_{01} via the Galois group action.

$$\text{Somit ist } \eta_{00} \cdot \eta_{01} = \underbrace{\eta_{00} + \eta_{01}}_{=\eta_0} + \underbrace{\eta_{10} + \eta_{11}}_{=\eta_1} = -1$$

Analog erhalten wir

$$(X - \eta_{10}) \cdot (X - \eta_{11}) = X^2 - \underbrace{(\eta_{10} + \eta_{11})}_{= \eta_1} \cdot X + \underbrace{\eta_{10} \cdot \eta_{11}}_{= -1} = X^2 - \eta_1 X - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\eta_{10} \neq \eta_{11}}$$

Zum Schluss betrachten wir 6^8 mit $\text{ord}(6^8) = 2$:

$$6^8: [1, 16], [13, 4]; \dots$$

$$=: \eta_{000} \quad =: \eta_{001}$$

$$(X - \eta_{000}) \cdot (X - \eta_{001}) = X^2 - \eta_{00} X + \underbrace{(\eta_{000} \cdot \eta_{001})}_{= \eta_{10}} = X^2 - \eta_{00} X + \eta_{10} = 0$$

+	13	4	$\Rightarrow \Sigma = \eta_{10}$
1	14	5	
16	12	3	

Mit der quad. Gleichung $X^2 - \eta_{00} X + \eta_{10} = 0$ können wir dann schliesslich $\eta_{000} = 2 \cos(\frac{2\pi}{17})$ konstruieren und damit auch das 17-Eck.

Bem. Bei der Konstruktion der Nullstellen der quad. Gleichungen muss jeweils bestimmt werden, welche Nullstelle zu welchem η -Wert gehört. Offensichtlich ist $\eta_{000} > \eta_{001}$ und mit geometrischen Argumenten lässt sich zeigen, dass gilt $\eta_0 > \eta_1$, $\eta_{00} > \eta_{01}$, und $\eta_{10} > \eta_{11}$.