Serie 1: Lösung

Übung 1. Sei $X = [-1, 1]$ als Unterraum von $\mathbb{R}$ mit der Unterraumtopologie. Entscheiden Sie für jede der folgenden Mengen in X ob sie offen, abgeschlossen, beides, oder keines von beidem ist:

$$\{x \in X \mid \tfrac{1}{2} < |x| < 1\},$$
$$\{x \in X \mid \tfrac{1}{2} < |x| \leqslant 1\},$$
$$\{x \in X \mid \tfrac{1}{2} \leqslant |x| < 1\},$$
$$\{x \in X \mid \tfrac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 1\}.$$

Lösung für Übung 1: Für alle Mengen entscheiden wir jeweils für die Menge und ihr Komplement, ob sie offen sind. Das ist genug um zu entscheiden, ob die Mengen offen, abgeschlossen, beides, oder keines von beidem sind.

(a) Die Menge $M_1 \coloneqq \{x \in X \mid 1/2 < |x| < 1\}$ ist offen, weil sie auch offen in $\mathbb{R}$ ist. Das Komplement

$$K_1 = \{-1, 1\} \cup [-1/2, 1/2] \subset X$$

ist nicht offen, weil alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}$, die 1 enthalten, auch $1 - \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ klein genug enthalten.

(b) Die Menge $M_2 \coloneqq \{x \in X \mid 1/2 < |x| \leqslant 1\}$ ist auch offen, weil

$$M_2 = X \cap \left(\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\right).$$

Das Komplement

$$K_2 \coloneqq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset X$$

ist nicht offen, weil allen offen Mengen $U \subset \mathbb{R}$, die $1/2$ enthalten, auch $1/2 + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ klein genug enthalten.

(c) Die Menge $M_3 \coloneqq \{x \in X \mid 1/2 \leqslant |x| < 1\}$ ist nicht offen, aus dem gleichen Grund wie vorher: alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}$, die $1/2$ enthalten, enthalten auch $1/2 - \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ klein genug. Aus dem gleichen Grund, ist das Komplement K_3 auch nicht offen.

(d) Die Menge $M_4 \coloneqq \{x \in X \mid 1/2 \leqslant |x| \leqslant 1\}$ ist abgeschlossen, da sie auch abgeschlossen in $\mathbb{R}$ ist. Aber M_4 ist nicht offen, aus dem Gleichen Grund wie M_3.

Übung 2. Sei X eine Menge.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{O}_{\text{cof}} \coloneqq \{U \subseteq X \mid X \backslash U \text{ ist endlich oder } U \text{ ist die leere Menge}\}$$

eine Topologie auf X ist. Man nennt $\mathcal{O}_{\text{cof}}$ die kofinite Topologie.

(b) Für welche Mengen X bildet die Menge aller endlicher Teilmengen eine Topologie?

Lösung für Übung 2:

(a) Offensichtlich sind $\emptyset$ und X in $\mathcal{O}_{\text{cof}}$ enthalten. Seien nun $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_{\text{cof}}$. Falls $U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$ ist, so ist $U_1 \cap U_2 = \emptyset \in \mathcal{O}_{\text{cof}}$. Sei also $U_1 \neq \emptyset \neq U_2$. Dann gilt nach den De Morganschen Gesetzen, dass

$$X \backslash (U_1 \cap U_2) = (U_1 \cap U_2)^c = U_1^c \cup U_2^c$$

als Vereinigung zweier endlicher Mengen ebenfalls endlich ist. Also ist $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}_{\text{cof}}$. Sei nun $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}_{\text{cof}}$ beliebig. Wir behaupten, dass $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \in \mathcal{O}_{\text{cof}}$ gilt. Falls die Kardinalität von $\mathcal{S}$ kleiner als 2 ist, so ist nichts zu zeigen. Sei also $|\mathcal{S}| \geqslant 2$. Dann gibt es ein $U_0 \neq \emptyset$ in $\mathcal{S}$. Folglich ist

$$X \backslash \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \subseteq X \backslash U_0$$

endlich und somit ist $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U$ in $\mathcal{O}_{\text{cof}}$ enthalten.

(b) Dies ist nur der Fall für endliche Mengen X.

Übung 3. Sei X eine Menge.

(a) Seien d_1 und d_2 Metriken auf X, so dass es eine reelle Zahl $a > 0$ gibt mit

$$d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y)^a$$

für alle $(x,y) \in X \times X$. Beweisen Sie, dass d_2 eine feinere Topologie als d_1 auf X induziert. Nehmen Sie jetzt zusätzlich an, dass es eine reelle Zahl $b > 0$ gibt mit

$$d_2(x,y) \leqslant d_1(x,y)^b$$

für alle $(x,y) \in X \times X$. Beweisen Sie, dass d_1 und d_2 dieselbe Topologie auf X induzieren.

(b) Sei d eine Metrik auf X. Zeigen Sie, dass

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

eine Metrik auf X definiert. Zeigen Sie, dass δ und d dieselben Topologien definieren. Zeigen Sie $\delta(x,y) \leqslant 1$ für alle $(x,y) \in X \times X$. (Dies demonstriert, dass man in jedem metrischen Raum die Metrik so ändern kann, dass zwei beliebige Punkte den Abstand $\leqslant 1$ haben, ohne die Topologie zu ändern.)

Lösung für Übung 3:

(a) Sei $\mathcal{T}_i$ die Topologie auf X, die von d_i induziert ist. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Sei $U \subset X$ eine offene Menge bezüglich $\mathcal{T}_1$ und sei x ein Punkt in X, der in U liegt. Da U offen ist, gibt es ein $r \in \mathbb{R}$ mit

$$B_{d_1}(x,r) \subset U.$$

Aus der Ungleichung folgt

$$B_{d_2}(x, r^{1/a}) \subset U.$$

Dies gilt für jeden Punkt $x \in U$, also ist U auch offen bezüglich $\mathcal{T}_2$. Das heisst, $\mathcal{T}_2$ ist feiner als $\mathcal{T}_1$. Wenn die zweite Ungleichung gilt, so ist sowohl $\mathcal{T}_2$ feiner als $\mathcal{T}_1$, als auch $\mathcal{T}_1$ feiner als $\mathcal{T}_2$. Das heisst, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

(b) Es ist klar, dass δ symmetrisch und positiv definit ist. Es bleibt noch die Dreiecksungleichung zu zeigen. Als erstes zeigen wir, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$

$$1 + \frac{1}{1+a+b} \geqslant \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}. \tag{1}$$

Das entspricht,

$$\begin{aligned} \frac{1+a+b+1}{1+a+b} &\geqslant \frac{1+a+b+1}{(1+a)\cdot(1+b)} \\ \Leftrightarrow (1+a)(1+b) &\geqslant (1+a+b) \\ \Leftrightarrow 1+a+b+ab &\geqslant 1+a+b \\ \Leftrightarrow ab &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Aber dies gilt, da a, b nicht-negativ sind. Seien $x, y, z \in X$, dann sind die folgenden Ungleichungen äquivalent.

$$\begin{aligned} &\delta(x,y) + \delta(y,z) \geqslant \delta(x,z) \\ \Leftrightarrow\ & 1 - \frac{1}{1+d(x,y)} + 1 - \frac{1}{1+d(y,z)} \geqslant 1 - \frac{1}{1+d(x,z)} \\ \Leftrightarrow\ & 1 + \frac{1}{1+d(x,z)} \geqslant \frac{1}{1+d(x,y)} + \frac{1}{1+d(y,z)} \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (1), und weil d eine Metrik ist, folgt

$$1+\frac{1}{1+d(x,z)} \geqslant 1+\frac{1}{1+d(x,y)+d(y,z)} \geqslant \frac{1}{1+d(x,y)}+\frac{1}{1+d(y,z)}.$$

Wir beweisen jetzt, dass d und δ die selbe Topologie induzieren. Wir haben $B_d(x,r) = B_\delta(x,\alpha(r))$, für $\alpha(t) = t/(1+t)$. Also ist jeder d-Ball auch ein δ-Ball, und somit offen bezüglich δ. Umgekehrt ist $B_\delta(x,r)$ ganz X falls $r \geqslant 1$, und gleich $B_d(x,\alpha^{-1}(r))$ falls $r < 1$. (Beachte, dass α eine bijektive Funktion $[0,1) \to [0,\infty)$ ist, mit Umkehrfunktion $\alpha^{-1}(t) = t/(1-t)$). Folglich ist auch jeder δ-Ball offen bezüglich d. Das heisst, dass d und δ dieselbe Topologie induzieren.

Vergleiche diese Aufgabe auch mit Exercise 9.8 im Analysis II Script von Joaquim Serra: `https://metaphor.ethz.ch/x/2024/fs/401-1262-07L/notes/Analysis_II_Script_v1.pdf`

Übung 4. Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine Menge.

(a) Zeigen Sie, dass das Innere A° die grösste in A enthaltene offene Menge ist, d.h. A° ist offen und für jede offene Menge $B \subseteq A$ gilt $B \subseteq A^\circ$.

(b) Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ von A die kleinste abgeschlossene Menge ist, die A enthält, d.h. $\overline{A}$ ist abgeschlossen und für jede abgeschlossene Menge B mit $B \supseteq A$ gilt $B \supseteq \overline{A}$.

(c) Zeigen Sie, dass das Innere des Rands von A leer ist, d.h. $(\partial A)^\circ = \emptyset$.

Lösung für Übung 4:

(a) Für alle $x \in A^\circ$, gibt es eine offene Menge U_x mit $x \in U_x \subset A$. Es folgt $U_x \subset A^\circ$. Also,

$$A^\circ = \bigcup_{x \in A^\circ} U_x.$$

Das zeigt, dass A° eine offene Menge ist.

Sei $B \subset A$ eine offene Menge und $x \in B$. Dann $x \in B \subset A$, also $x \in A^\circ$. Das heisst, dass $B \subset A^\circ$.

(b) Für alle $x \notin \overline{A}$, gibt es eine offene Menge U_x disjunkt von A, die x enthält. Also $U_x \cap \overline{A} = \emptyset$ und

$$X \backslash \overline{A} = \bigcup_{x \notin \overline{A}} U_x.$$

Das zeigt, dass $\overline{A}$ eine abgeschlossene Menge ist.

Seien $B \supset A$ eine abgeschlossene Menge und $x \notin B$. Dann $x \in X \backslash B \subset X \backslash A$, also ist x ein äusserer Punkt von A, folglich $x \notin \overline{A}$. Das heisst, dass $B \supset \overline{A}$.

(c) Diese Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Man sieht, dass der Rand von $\mathbb{Q}$ gleich $\mathbb{R}$ ist. Aber das Innere von $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$, und nicht leer.

Übung 5. $(\star)$ Sei $\mathbb{Z}$ die Menge aller ganzen Zahlen und

$$\sigma = \{a\mathbb{Z} + b \mid a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ \ b \in \mathbb{Z}\}$$

eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

(a) Zeigen Sie, dass σ eine Basis für eine Topologie $\mathcal{O}$ ist und dass alle Elemente von σ bezüglich $\mathcal{O}$ abgeschlossen sind.

(b) Zeigen Sie

$$\mathbb{Z}\backslash\{-1,1\} = \bigcup_{p \text{ prim}} p\mathbb{Z}.$$

(c) Folgern Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Lösung für Übung 5:

(a) Seien $a\mathbb{Z}+b$ und $a'\mathbb{Z}+b'$ zwei Mengen in σ. Der Chinesische Restsatz sagt uns, dass der Schnitt dieser beiden Mengen entweder leer ist, oder selbst wieder von der Form $a''\mathbb{Z}+b''$ (falls $b \equiv b' \pmod{\mathrm{ggT}(a,a')}$, so ist $a''=\mathrm{kgV}(a,a')$, andernfalls ist der Schnitt leer – aber das ist für die Aufgabe nicht relevant).

Also ist der Durchschnitt von endlich vielen Mengen aus σ wieder eine Vereinigung von Mengen aus σ; ausserdem ist $\mathbb{Z}=1\mathbb{Z}+0$ selbst in σ. Es folgt, dass σ eine Basis für eine Topologie $\mathcal{O}$ ist.

Seien $a\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ und $b\in\mathbb{Z}$. Das Komplement von $a\mathbb{Z}+b$ ist gleich

$$K_{a,b} \coloneqq \{n\in\mathbb{Z} \mid n\not\equiv b \pmod{a}\} = \bigcup_{b'=b+1,\dots,b+a-1} (a\mathbb{Z}+b').$$

$K_{a,b}$ ist also die Vereinigung offener Menge. Also ist $a\mathbb{Z}+b$ abgeschlossen.

(b) Wir wissen, dass es für alle Zahlen $z\neq\pm1$ eine Primzahl p mit $p\mid z$ gibt. Die Gleichung

$$\mathbb{Z}\backslash\{-1,1\} = \bigcup_{p \text{ prim}} p\mathbb{Z}$$

folgt.

(c) Als erstes zeigen wir, dass alle nicht-leeren offenen Mengen unendlich sind. Dies folgt, weil jede nicht-leere offene Menge Vereinigung von Mengen aus der Basis σ ist, und jede Menge in σ unendlich ist.

Gäbe es nicht unendlich viele Primzahlen, dann wäre $\mathbb{Z}\backslash\{-1,1\}$ die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen (hier verwenden wir (a) und (b)). Dann wäre $\mathbb{Z}\backslash\{-1,1\}$ abgeschlossen und $\{-1,1\}$ offen; aber $\{-1,1\}$ ist nicht unendlich, das ist ein Widerspruch!

Übung 6. Sei $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n\in\mathbb{R}\}$ die Menge aller Folgen reeller Zahlen. Sei $\mathcal{O}$ die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (das Produkt hat $\mathbb{N}$ viele Faktoren, und jeder Faktor ist $\mathbb{R}$).

(a) Sei

$$d((x_n),(y_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\min(|x_n-y_n|,1)}{2^n},$$

für zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass d wohldefiniert[3] ist und eine Metrik auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.

(b) ($\star\star$) Zeigen Sie, dass die von der Metrik d induzierte Topologie gleich $\mathcal{O}$ ist[4].

(c) Beschreiben Sie eine Metrik e auf $\coprod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R}$, welche die Summentopologie der $\mathbb{N}$ Kopien von $\mathbb{R}$ induziert[5].

Lösung für Übung 6:

(a) Die Reihe ist absolut konvergent, weil

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{\min(|x_n-y_n|,1)}{2^n}\right| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1 < +\infty.$$

Wenn $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ nicht gleich sind, sehen wir, dass es $n\in\mathbb{N}$ mit $x_n\neq y_n$ gibt. Dann gilt $d((x_n),(y_n))>0$, also d ist positiv definit. Seien $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ und $(z_n)_n$ drei Folgen, dann

$$d((x_n),(z_n)) = \sum \frac{\min(|x_n-z_n|,1)}{2^n} \leqslant \sum \frac{\min(|x_n-y_n|+|y_n-z_n|,1)}{2^n} \leqslant d((x_n),(y_n)) + d((y_n),(z_n)).$$

Das ist die Dreiecksungleichung.

(b) (basierend auf der Lösung von Joris Liebing) Sei zuerst U bezüglich d offen, wir zeigen, dass U auch in der Produkttopologie von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ liegt. Sei dazu $(x_n)_n \in U$. Wegen Offenheit existiert

$$B_d((x_n)_n, r) \coloneqq \left\{ (y_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\min(|x_n - y_n|, 1)}{2^n} < r \right\} \subseteq U.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $r = 1/2^k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Definiere nun:

$$U_x \coloneqq B(x_1, 2^{-k-1}) \times B(x_2, 2^{-k-1}) \times \cdots \times B(x_{k+1}, 2^{-k-1}) \times \mathbb{R} \times \cdots$$

Dann ist U_x offen bezüglich der Produkttopologie und $U_x \subseteq B_d((x_n)_n, r)$, was eine einfache Abschätzung zeigt. Da $(x_n)_n \in U$ beliebig, folgt die Offenheit von U in der Produkttopologie.

Sei nun U in der Produkttopologie. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist

$$U = U_1 \times \ldots \times U_k \times \mathbb{R} \times \cdots$$

Sei nun $(x_n)_n \in U$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit finden wir $r = 1/2^\ell > 0$, sodass

$$V \coloneqq B(x_1, r) \times \cdots \times B(x_k, r) \times \mathbb{R} \times \cdots \subseteq U$$

Man nehme nun die in der von d induzierten Topologie offene Menge

$$U_x \coloneqq B_d\left((x_n)_n, \frac{1}{2^{\ell+k}}\right).$$

Es folgt, dass, wenn y darin enthalten ist, gelten muss, dass

$$|y_1 - x_1| < \frac{1}{2^\ell}, \ldots, |y_k - x_k| < \frac{1}{2^\ell}$$

Es folgt also $U_x \subseteq V$. Aus der Beliebigkeit von $(x_n)_n$ erhalten wir also, dass U auch bezüglich d offen ist.

(c) Wir definieren d wie folgt:

$$d\colon \coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \times \coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \min(d_{\mathbb{R}}(x, y), 1) & \text{wenn } x \text{ und } y \text{ in der gleicher Kopie von } \mathbb{R} \text{ sind,} \\ 1 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Es ist klar, dass d positiv definit ist. Wir beweisen die Dreiecksungleichung. Seien x, y und z drei Punkte in $\coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$. Wir bemerken, dass d stets kleiner gleich 1 ist. Wir sollen zeigen, dass

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

Wenn x, y oder y, z nicht in der gleicher Kopie von $\mathbb{R}$ sind, dann folgt die Ungleichung, weil die linke Seite der Ungleichung stets kleiner gleich als 1 ist. Andernfalls sind x, y, z in der gleicher Kopie von $\mathbb{R}$. Dann folgt die Ungleichung, weil allen Punkte in die gleicher Kopie von $\mathbb{R}$ sind, also ist es die Dreiecksungleichung für die Metrik $\min(d_{\mathbb{R}}(x, y), 1)$ auf $\mathbb{R}$.

Ein Ball von Radius kleiner als 1 bezüglich d ist ein Ball in einer der Kopien von $\mathbb{R}$. Daraus folgt, dass die Topologie von d die Summentopologie ist.

* * *

Serie 2: Lösung

Übung 1. Sei X eine Menge und sei Y ein topologischer Raum. Sei $f\colon X \to Y$ eine beliebige Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{O}$ der Teilmengen von X der Form $U = f^{-1}(V)$ für offene Mengen $V \subseteq Y$ eine Topologie auf X ist. Diese heisst *Initialtopologie* bezüglich f.

(b) Zeigen Sie, dass $f\colon (X, \mathcal{O}) \to Y$ stetig ist.

(c) Sei X' eine Menge mit Topologie $\mathcal{O}'$. Angenommen, alle Funktionen $f\colon X' \to Y'$ für alle topologischen Räume Y' sind stetig. Was können Sie über $\mathcal{O}'$ sagen?

(d) Sei X' eine Menge mit Topologie $\mathcal{O}'$. Angenommen, alle Funktionen $f\colon Y' \to X'$ für alle topologischen Räume Y' sind stetig. Was können Sie über $\mathcal{O}'$ sagen?

Lösung für Übung 1:

(a) Als erstes sehen wir, dass $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ und $X = f^{-1}(Y)$ in $\mathcal{O}$ liegen. Seien $U_i = f^{-1}(V_i)$ für offene Menge V_i und $i \in I$ eine Familie von Mengen in $\mathcal{O}$. Dann,

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right)$$

und da $\bigcup_{i\in I} V_i$ eine offene Menge ist, liegt $\bigcup_{i\in I} U_i$ auch in $\mathcal{O}$. Wir haben auch

$$U_i \cap U_j = f^{-1}(V_i \cap V_j),$$

also liegt $U_i \cap U_j$ auch in $\mathcal{O}$. Wir haben gezeigt, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X ist.

(b) Die Funktion $f\colon (X, \mathcal{O}) \to Y$ ist stetig, wenn für alle offenen Mengen V bezüglich der Topologie von Y $f^{-1}(V)$ offen ist. Das ist unsere Definition für $\mathcal{O}$ gewesen!

(c) Sei der topologische Raum Y' die Menge X' mit der diskreten Topologie und f schicke x auf x. Alle Teilmengen $V \subset X'$ sind offen bezüglich der diskreten Topologie, also ist $V = f^{-1}(V)$ auch offen bezüglich $\mathcal{O}'$, weil f stetig ist. Es folgt, dass $\mathcal{O}'$ auch die diskrete Topologie ist. Umgekehrt ist auch klar, wenn $\mathcal{O}'$ die diskrete Topologie ist, dass alle Funktionen auf X' stetig sind.

(d) Sei der topologische Raum Y' die Menge X' mit der indiskreten Topologie und f schicke x auf x. Für alle Teilmengen $V \in \mathcal{O}'$ soll $V = f^{-1}(V)$ offen bezüglich Y' sein. Das heisst $V = \emptyset$ oder X'. Also ist $\mathcal{O}'$ die indiskrete Topologie. Es ist auch klar, wenn $\mathcal{O}'$ die indiskrete Topologie ist, dass alle Funktion nach X' stetig sind.

Übung 2. Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass es für jede Menge von Teilmengen $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ genau eine Topologie $\mathcal{O}_S$ auf X gibt, sodass S eine Subbasis von $\mathcal{O}_S$ ist. Zeigen Sie weiter, dass dies die kleinste (auch gröbste genannt) Topologie von X ist, die S enthält, d.h. ist $\mathcal{O}$ eine Topologie von X mit $S \subseteq \mathcal{O}$, dann gilt $\mathcal{O}_S \subseteq \mathcal{O}$.

Lösung für Übung 2: Sei $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir bauen unsere Topologie $\mathcal{O}_S$ wie folgt. Wir definieren $\mathcal{O}_S \subseteq \mathcal{P}(X)$ als die Teilmenge aller

$$U \coloneqq \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J_i} U_j^i$$

für alle Familien $(U_j^i)_{j\in J_i, i\in I}$ von Mengen in S mit J_i endlich für alle $i \in I$. Vorerst sehen wir, dass $\bigcap_{j\in J_i} U_j^i$ offen sein soll, da J ist endlich. Da $\bigcap_{j\in J} U_j^i$ ist offen für alle $i \in I$, die Menge U soll auch offen sein. Dies zeigt, dass eine Topologie, die S enthält, auch $\mathcal{O}_S$ enthält. Somit ist $\mathcal{O}_S$ die kleinste Topologie von X ist, die S enthält, sofern $\mathcal{O}_S$ eine Topologie ist. Wir prüfen jetzt, dass $\mathcal{O}_S$ eine Topologie ist. Sei I eine einelementige Menge und J_i die leere Menge, dann

$$\bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J_i} U_j^i = X,$$

also liegt X in $\mathcal{O}_S$. Sei jetzt I die leere Menge, dann

$$\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J_i} U_j^i = \emptyset,$$

also liegt $\emptyset$ auch in $\mathcal{O}_S$. Seien zwei Elemente von $\mathcal{O}_S$ gegeben:

$$U \coloneqq \bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J_i} U_j^i, \quad U' \coloneqq \bigcup_{i'\in I'}\bigcap_{j\in J_{i'}} U_j^{i'}.$$

Wir definieren $X_i = \bigcap_{j\in J_i} U_j^i$ und $X_{i'} = \bigcap_{j\in J_{i'}} U_j^{i'}$ für alle $i \in I$ und $i' \in I$. Weil $\cap$ distributiv über $\cup$ ist, haben wir

$$U \cap U' = \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \cap \left(\bigcup_{i'\in I'} X_{i'}\right) = \bigcup_{i,i'\in I\times I'} X_i \cap X_{i'}.$$

Den Durchschnitt von X_i und $X_{i'}$ kann man auch als $\bigcap_{j\in J_i} U_j^i \cap \bigcup_{j\in J_{i'}} U_j^{i'}$ schreiben. Da dies ein Schnitt endlich vieler offener Mengen ist, folgt dass $U \cap U'$ in O_S liegt. Wenn U_k für $k \in K$ in $\mathcal{O}_S$ liegen, liegt die Vereinigung $\bigcup_{k\in K} U_k$ auch in $\mathcal{O}_S$ (es ist eine grössere Vereinigung von endlichen Schnitten von Elementen von S). Das zeigt, dass $\mathcal{O}_S$ eine Topologie ist.

Übung 3.

(a) ($\star$) Entscheiden Sie, welche der folgenden topologischen Räume homöomorph zueinander sind:

$$\mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^2, \quad (0,1), \quad [0,1), \quad [0,1], \quad S^1.$$

(b) ($\star\star\star$) Sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}^2$ homöomorph?

Lösung für Übung 3:

(a) Zuerst sehen wir, dass $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan(\pi x - \pi/2)$ ein Homöomorphismus zwischen $(0,1)$ und $\mathbb{R}$ ist ($\tan$ ist stetig und $\tan^{-1}$ auch). Jetzt beschreiben wir verschiedene topologische Eigenschaften für die genannten topologische Räume, die zeigen, dass alle anderen topologische Räume nicht homöomorph zueinander sind.

(i) $\mathbb{R} \cong (0,1)$: Der Raum $\mathbb{R}\backslash\{x\}$ ist für keinen Punkt $x \in \mathbb{R}$ zusammenhängend.

(ii) $\mathbb{R}^2$: Der Raum $\mathbb{R}^2\backslash\{x_1,\dots,x_n\}$ ist immer zusammenhängend für alle Punkte $x_1,\dots,x_n$ in $\mathbb{R}^2$.

(iii) $[0,1)$: Der Raum $[0,1)\backslash\{x\}$ ist für keinen Punkt $x \in (0,1)$ zusammenhängend, aber zusammenhängend für $x = 0$.

(iv) $[0,1]$: Der Raum $[0,1]\backslash\{x\}$ ist für keinen Punkt $x \in (0,1)$ zusammenhängend, aber $[0,1]\backslash\{0,1\}$ ist zusammenhängend.

(v) S^1: Der Raum $S^1\backslash\{x\}$ ist immer zusammenhängend für alle Punkte $x \in S^1$.

(b) Ja, sie sind homöomorph! Die ist ein Spezialfall des Satzes von Sierpinski.

Übung 4. Seien X die reellen Zahlen mit der natürlichen Topologie (der von der euklidischen Metrik induzierten), und Y die reellen Zahlen mit der von allen Intervallen der Form $[a,b)$ für $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ erzeugten Topologie.

(a) Zeigen Sie, dass die Topologie von Y feiner als die Topologie von X ist.

(b) Man beschreibe die stetigen Funktionen $f\colon Y \to X$.

Lösung für Übung 4:

(a) Sei (a, b) ein offenes Intervall. Wir haben

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{2^n} b + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) a, b \right).$$

Dies zeigt, dass die Topologie auf Y feiner als die Topologie auf X ist, weil die offenen Intervallen einen Basis für die Topologie auf X sind.

(b) Es genügt, die Stetigkeit auf einer Basis zu prüfen (warum?); d.h. $f\colon Y \to X$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}((x - \varepsilon, x + \varepsilon))$ offen ist für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Diese Menge ist genau dann offen, wenn für jedes $y \in Y$ mit $y \in f^{-1}((x - \varepsilon, x + \varepsilon))$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $[y, y + \delta) \subset f^{-1}((x - \varepsilon, x + \varepsilon))$. Also ist die Stetigkeit von f zu folgendem äquivalent: für alle $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, und y mit $f(y) = x$ existiert ein δ, sodass für alle y' mit $y' \geqslant y$ und $|y - y'| < \delta$ gilt: $|f(y') - f(y)| < \varepsilon$. Das ist genau die Definition von Rechtsstetigkeit.

Übung 5. In dieser Übung vergleichen wir Zusammenhang und Wegzusammenhang.

(a) Zeigen Sie, dass ein wegzusammenhängender Raum X auch zusammenhängend ist.

(b) ($\star$) Zeigen Sie, dass ein zusammenhängender topologischer Raum X, in dem jeder Punkt eine wegzusammenhängende offene Umgebung hat, auch wegzusammenhängend ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ mit der kofiniten Topologie zusammenhängend ist. (Die kofinite Topologie ist in Serie 1 definiert.)

(d) ($\star\star$) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ mit der kofiniten Topologie nicht wegzusammenhängend ist.

Lösung für Übung 5:

(a) Wäre X nicht zusammenhängend, gäbe es U und V, zwei offene nicht-leere Mengen mit $U \sqcup V = X$. Seien $x \in U$ und $y \in V$. Es gibt eine stetige Funktion $\gamma\colon [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1)$, da X wegzusammenhängend ist. Dann haben wir $\gamma^{-1}(U) \sqcup \gamma^{-1}(V) = [0, 1]$ aber $[0, 1]$ ist zusammenhängend. Das ist ein Widerspruch.

(b) Wir betrachten alle $x \in X$ die Menge $S(x)$ aller Punkte, zu denen es einen Weg von x gibt. Wir wollen zeigen, dass die Menge $S(x)$ offen und abgeschlossen ist.

Lemma 1. *Sei X ein topologischer Raum, in dem jeder Punkt eine wegzusammenhängende offene Umgebung hat. Für alle $x \in X$ ist die Menge $S(x)$ offen.*

Beweis. Seien y ein Punkt in $S(x)$ und $\gamma\colon [0, 1] \to X$ ein Weg von x zu y. Mit unserer Hypothese gibt es eine offene Umgebung U für y, die wegzusammenhängend ist. Also gibt es für alle $z \in U$ einen Weg γ' von y zu z. Man kann γ und γ' zu einem Weg von x nach z zusammensetzen. Somit $U \subset S(x)$, und es folgt, dass $S(x)$ offen ist. □

Ähnlich beweist man, dass für $x, y \in X$ entweder $S(x) \cap S(y) = \emptyset$ oder $S(x) = S(y)$ gibt. Wir schreiben

$$X = \bigcup_{x \in X} S(x).$$

All diese Mengen $S(x)$ sind nicht-leer (da $x \in S(x)$) und offen. Da X zusammenhängend ist, haben wir auch, dass $S(x) = S(y)$ für alle $x, y \in S(x)$. In anderen Wörter: X ist wegzusammenhängend.

(c) Wäre $\mathbb{Z}$ nicht zusammenhängend, gäbe es U und V zwei offene nicht-leere Mengen mit $U \sqcup V = \mathbb{Z}$, dann haben wir auch $(\mathbb{Z}\backslash U) \cup (\mathbb{Z}\backslash V) = \mathbb{Z}$. Die Mengen $\mathbb{Z}\backslash U$ und $\mathbb{Z}\backslash V$ sind abgeschlossen, also sind sie endlich. Da $\mathbb{Z}$ unendlich ist, haben wir einen Widerspruch.

(d) Wir beweisen zuerst ein Lemma.

Lemma 2. *Es gibt keine Familie abgeschlossener Mengen $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$, von denen mindestens zwei nicht leer sind, mit $F_i \cap F_j = \emptyset$ für all $i, j \in \mathbb{N}$ und*

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i = [0,1].$$

Beweis. Wir bauen eine Intervallschachtelung

$$[0,1] = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$$

nicht-leerer abgeschlossener Intervalle, welche die zwei folgenden Aussagen erfüllt:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$, $F_n \cap I_n = \emptyset$.
- Für alle $i, n \in \mathbb{N}$ enthält F_i nicht I_n.

Dann gibt es $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$ mit $x \notin F_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Das ist ein Widerspruch.

Wir bauen $(I_n)_n$ mit einer vollständigen Induktion.

Induktionsanfang: Wir definieren $I_0 = [0,1]$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass $I_0, \ldots I_{n-1}$ bereits konstruiert wurden. Wir können I_n wie folgt bauen. Wenn $I_{n-1} \cap F_n = \emptyset$ gilt, dann tun wir nichts: $I_n := I_{n-1}$. Betrachten wir jetzt den Fall $I_{n-1} \cap F_n \neq \emptyset$. Nach Annahme gilt $I_{n-1} \not\subset F_n$. Also gibt es eine weiteres $m \neq n$ sodass $I_{n-1} \cap F_m \neq \emptyset$. Man kann offene disjunkte Mengen $U, V \in I_{n-1}$ wählen sodass $F_n \cap I_{n-1} \subset U$ und $F_m \cap I_{n-1} \subset V$ (warum?). Wir definieren I_n als Abschluss einer Zusammenhangskomponente von V. Da Zusammenhangskomponenten offener Mengen in I_{n-1} wieder offen sind (warum?), folgt, dass I_n ein abgeschlossenes Intervall ist. Nach Konstruktion ist es enthalten in I_{n-1} und disjunkt von F_n. Ausserdem enthält I_n sowohl Punkte in F_m, als auch Punkte ausserhalb von F_m. Also gibt es kein F_i, welches I_n enthält. Dies beendet den Induktionsschritt. □

Wäre die Menge $\mathbb{Z}$ wegzusammenhängend, könnten wir einen Pfad $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{Z}$ mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = 1$ finden. Wir haben

$$\mathbb{Z} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} \{n\}$$

eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen, also

$$[0,1] = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} \gamma^{-1}(\{n\}).$$

Das ist ein Widerspruch zu Lemma 2.

Bemerkung 1. *Andererseits, wenn X eine topologische Menge mit der kofiniten Topologie und der Kardinalität von $\mathbb{R}$ (oder grösser) ist, kann man beweisen, dass X wegzusammenhängend ist. Seien x und y zwei Punkte in X und γ eine injektive Funktion von $[0,1]$ nach X mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Dann ist γ stetig, da für alle abgeschlossen Menge $F \subset X$, $\gamma^{-1}(F) \subset [0,1]$ abgeschlossen ist (die Teilmenge ist endlich).*

Als nächstes kann man fragen: „Was passiert wenn die Kardinalität der Menge X zwischen $\aleph_0$ und $2^{\aleph_0}$ ist?". Ein solches X existiert, wenn unsere Modell nicht die Kontinuumshypothese (Kontinuumshypothese: $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$) erfüllt. Ich kenne die Antwort nicht.

Übung 6. Die Mengen $\Pi_{i\in I} U_i$ mit $U_i \subset X_i$ offen für alle $i \in I$ bilden eine Basis für eine Topologie auf $\Pi_{i\in I} X_i$, die sogenannte *Box-Topologie*. Betrachten wir $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit dieser Topologie. Zeigen Sie, dass die Menge aller Folgen, die gegen 0 konvergieren, eine offene und abgeschlossene Menge ist. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie und $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit der Boxtopologie nicht homöomorph sind.

Lösung für Übung 6: Sei M die Menge aller Folgen, die gegen 0 konvergieren. Zuerst zeigen wir, dass M offen ist. Sei $(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine gegebene konvergente Folge. Definiere die offene Menge

$$U := \prod_{n\in\mathbb{N}} B\left(x_n, \frac{1}{n}\right).$$

Sei $(y_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge in U, dann $|y_n| \leqslant |x_n| + 1/n \to 0$. Das heisst, dass $(y_n)_n$ auch in M liegt. Die Menge M ist also offen. Als nächstes zeigen wir, dass M abgeschlossen ist. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die nicht in M liegt. Das heisst, dass es $\varepsilon > 0$ und eine unendliche Teilmenge $I \subset \mathbb{N}$ mit $|x_n| > \varepsilon$ für alle $n \in I$ gibt. Dann liegen alle Folge $(y_n)_n$ in $\prod_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, \varepsilon/2)$ auch nicht in M. Die Menge M ist dann auch abgeschlossen.

Die Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie ist zusammenhängend (Serie 3, Übung 6). Es folgt, dass die beiden topologischen Räume nicht homöomorph sind.

* * *

Serie 3: Lösung

Übung 1. Zeigen Sie, dass eine konvergente Folge in einem Hausdorffraum nur einen Häufungspunkt hat. Ein Punkt ist ein *Häufungspunkt* einer Folge, falls jede Umgebung des Punktes unendlich viele Folgenglieder enthält. Folgern Sie, dass in einem Hausdorffraum der Grenzwert einer Folge, sofern er existiert, eindeutig ist.

Lösung für Übung 1: Sei $(X, \mathcal{O})$ ein Hausdorffraum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit Grenzwert x. Desweiteren sei $y \in X$ ein beliebiger, von x verschiedener Punkt in X. Da X ein Hausdorffraum ist, existieren zwei disjunkte offene Mengen U und V in X so, dass $x \in U$ und $y \in V$. Da U eine offene Umgebung von x ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $x_n \in U$ für alle $n \geqslant N$ gilt. Da U und V disjunkt sind, können wir jedoch nicht unendlich viele Folgenglieder in V finden, womit y kein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sein kann.

Übung 2. Wie in Serie 2, Übung 4, seien X die reellen Zahlen mit der natürlichen Topologie, und Y die reellen Zahlen mit der von Intervallen der Form $[a, b)$ mit $a < b$ erzeugten Topologie.

(a) Man zeige, dass Y *total unzusammenhängend* ist (d.h. dass Einpunktmengen die einzigen zusammenhängenden Teilmengen von Y sind).

(b) Man beschreibe die stetigen Abbildung $X \to Y$.

Lösung für Übung 2:

(a) Sei $C \in Y$ eine zusammenhängende Teilmenge mit zwei verschiedenen Punkten $x < y$. Dann

$$C = \left(C \cap \left(-\infty, \frac{x+y}{2}\right)\right) \cup \left(C \cap \left[\frac{x+y}{2}, +\infty\right)\right).$$

Das ist ein Widerspruch, also sind nur die Einpunktmengen zusammenhängend.

(b) Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Funktion. Da X zusammenhängen ist, ist auch $f(X) \subset Y$ zusammenhängend. Aus (a) folgt, dass $f(X)$ eine Einpunktmenge ist. Das heisst, dass f eine konstante Funktion ist.

Übung 3. Wie in Serie 1, Übung 2, sei $(X, \mathcal{O}_{\text{cof}})$ ein topologischer Raum mit der kofiniten Topologie.

(a) Zeigen Sie, dass X das Axiom T_1 erfüllt, d.h. für zwei verschiedene Punkte $a \neq b$ in X existieren offene Umgebungen von a und b, welche den jeweils anderen Punkt nicht enthalten.

(b) Wann ist X ein Hausdorffraum?

(c) Zeigen Sie, dass ein beliebiger topologischer Raum X genau dann das Axiom T_1 erfüllt, wenn alle einelementigen Teilmengen von X abgeschlossen sind.

Lösung für Übung 3:

(a) Seien $a \neq b \in X$. Dann erfüllen die offenen Mengen $X \setminus \{b\}$ (offene Umgebung von a, die b nicht enthält) und $X \setminus \{a\}$ (offene Umgebung von b, die a nicht enthält) die gewünschte Eigenschaft.

(b) Dies kann nur der Fall sein, wenn X endlich ist, denn für unendliche Mengen X mit der kofiniten Topologie ist der Durchschnitt zweier nichtleerer, offener Mengen nie leer. In der Tat sind für endliche Mengen X aber $\{a\}$ und $X \setminus \{a\}$ immer disjunkte Umgebungen von a und $b \neq a$.

(c) Sei X ein topologischer Raum, der T_1 erfüllt, und $x \in X$. Für alle $y \neq x$ gibt es also eine offene Umgebung U_y von y, sodass $x \notin U_y$ gilt. Dann ist $\{x\} = X \setminus \bigcup\{U_y \mid y \in X \setminus \{x\}\}$ abgeschlossen. Umgekehrt, seien $a, b \in X$ mit $a \neq b$. Dann sind $\{a\}$ und $\{b\}$ abgeschlossen, also $X \setminus \{b\}$ und $X \setminus \{a\}$ offene Umgebungen mit der gewünschten Eigenschaft.

Übung 4. Sei X eine Menge.

(a) Was sind die kompakten Mengen in X mit der diskreten Topologie?

(b) Was sind die kompakten Mengen in X mit der kofiniten Topologie?

Lösung für Übung 4:

(a) Wir wollen beweisen, dass ein Unterraum $A \subseteq X$ kompakt ist, genau dann wenn er endlich ist. Offensichtlich ist jede endliche Teilmenge von X kompakt, so dass wir die andere Implikation beweisen wollen. Betrachten wir einen unendlichen Unterraum $A \subseteq X$. Dann ist $\{x\}$ offen in A für jedes $x \in A$, da A die diskrete Topologie von X erbt. Daher ist $\mathcal{O} := \{\{x\}, x \in A\}$ eine unendliche offene Überdeckung von A. Offensichtlich lässt $\mathcal{O}$ aber keine endliche Teilüberdeckung zu, also ist A nicht kompakt.

(b) Alle Teilmengen von X mit der kofiniten Topologie sind kompakt. Für endliche Teilmengen (und insbesondere für endliche Mengen X) folgt dies aus der Definition. Sei also X unendlich, $A \subseteq X$ eine unendliche Teilmenge und $\mathcal{U} = \{A \setminus F_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A für endliche Mengen $F_i \subseteq X, i \in I$. Dann gilt

$$A = \bigcup_{i \in I} A \setminus F_i = A \setminus \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right),$$

also $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Sei nun $F_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$. Für alle $k = 1, \dots, n$, gibt es dann ein $i_k \in I$ sodass $x_k \notin F_{i_k}$ gilt, da der Durchschnitt aller F_is leer ist. Es gilt also $\bigcap_{k=1}^n F_{i_k} \cap F_1 = \emptyset$, womit

$$\mathcal{U}' := \{A \setminus F_1\} \cup \{A \setminus F_{i_k}\}_{k=1}^n$$

eine endliche Teilüberdeckung von A ist.

Übung 5. (Wegzusammenhangskomponenten) Sei X ein topologischer Raum und sei $x_0 \in X$.

(a) Die Menge

$$\{x \in X \mid \text{ es gibt einen Weg von } x \text{ nach } x_0\}$$

heisst *Wegzusammenhangskomponente* von x_0 (in der Vorlesung haben Sie die Zusammenhangskomponenten gesehen). Zeigen Sie, dass dies die grösste wegzusammenhängende Teilmenge von X ist, welche x_0 enthält.

(b) Was sind die Zusammenhangskomponenten und Wegzusammenhangskomponenten in $\mathbb{Q}$?

(c) Finden Sie ein Beispiel eines topologischen Raums mit einer Wegzusammenhangskomponente, die nicht abgeschlossen ist.

Lösung für Übung 5:

(a) Ist C eine wegzusammenhängende Teilmenge, die x enthält, so können wir einen Weg von x nach y für alle $y \in C$ finden. Daraus folgt, dass C eine Teilmenge der Wegzusammenhangskomponente ist. Anderseits ist die Wegzusammenhangskomponente von x_0 wegzusammenhängend, da es für alle y, x in der Wegzusammenhangskomponente einen Weg von y nach x und einen Weg von x nach z gibt. Man kann diese beiden Wege zu einem Weg von y nach z zusammensetzen.

(b) Die Zusammenhangskomponenten bzw. Wegzusammenhangskomponenten in $\mathbb{Q}$ sind genau die einelementigen Teilmengen von $\mathbb{Q}$.

(c) Sei Z die „topologist's sine curve" aus der Vorlesung. $Z_0 = \{(0,0)\}$ und $Z_1 = Z \setminus Z_0$ bilden gerade die Wegzusammenhangskomponenten von Z. Aber $\overline{Z_1} = Z$ und Z_1 ist somit nicht abgeschlossen in Z.

Übung 6.

(a) Zeigen Sie, dass das Produkt zweier nicht-leerer topologischer Räume X, Y genau dann kompakt ist, wenn X und Y kompakt sind.

(b) Zeigen Sie, dass das Produkt zweier topologischer Räume X, Y genau dann zusammenhängend ist, wenn X und Y zusammenhängend sind.

Seien $(X_i)_{i\in I}$ topologische Räume.

(c) Zeigen Sie, dass $\prod_{i\in I} X_i$ genau dann wegzusammenhängend ist, wenn X_i wegzusammenhängend für alle $i \in I$ ist.

(d) ($\star\star$) Zeigen Sie, dass $\prod_{i\in I} X_i$ genau dann zusammenhängend ist, wenn X_i zusammenhängend für alle $i \in I$ ist.

Lösung für Übung 6:

(a) Wenn $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von X ist, so ist $(U_i \times Y)_{i\in I}$ eine Überdeckung von $X \times Y$. Wenn $X \times Y$ kompakt ist, können wir eine endliche Teilüberdeckung finden. Die entsprechenden Mengen sind eine endliche Teilüberdeckung von X (hier verwenden wir, dass Y nicht leer ist).

Für die Umkehrung, sei $(W_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von $X \times Y$. Wir können annehmen, dass alle W_i die Form $U_i \times V_i$ mit offenen Teilmengen $U_i \subset X$ und $V_i \subset Y$ haben, da die offene Teilmengen in dieser Form eine Basis für die Produkttopologie sind (warum genau?). Für alle $x \in X$ gibt es eine endliche Teilmenge $J_x \subset I$ mit

$$\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i\in J_x} U_i \times V_i,$$

da Y kompakt ist. Sei $U_x = \bigcap_{i\in J_x} U_i$. Die Menge U_x ist offen, als ein endlicher Durchschnitt offener Mengen. Dann ist $(U_x \times V_i)_{i\in J}$ eine offene Überdeckung von $\{x\} \times Y$ und $(U_x)_{x\in X}$ ist eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es eine Teilüberdeckung $(U_x)_{x\in K}$ von X für eine endliche Teilmenge $K \subset X$. Es ergibt sich die endliche Teilüberdeckung $(U_i \times V_i)_{i\in J_x, x\in K}$ von $X \times Y$. Das heisst, dass $X \times Y$ kompakt ist.

(b) Wenn $X \times Y$ zusammenhängend ist, dann sind X und Y zusammenhängend als stetige Bilder unter den Projektionsabbildungen $\pi_X \colon X \times Y \to X$ bzw. $\pi_Y \colon X \times Y \to Y$.
Für die Umkehrung benutzen wir die folgende Aussage.

Lemma 1. *Sei X ein topologischer Raum. Dann X ist nicht zusammenhängend genau dann, wenn es eine stetige, surjektive Abbildung von X nach $\{0,1\}$ mit der diskreten Topologie gibt.*

Beweis. Angenommen, X ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es zwei nichtleere, offene, disjunkte Teilmengen $U, V \subseteq X$, sodass $X = U \cup V$, und

$$f \colon X \to \{0,1\},$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & x \in U \\ 1 & x \in V \end{cases}$$

ist eine wohldefinierte, surjektive und stetige Abbildung.
Umgekehrt sind wir für eine solche surjektive, stetige Abbildung $f \colon X \to \{0,1\}$ die Mengen $U := f^{-1}(0)$ und $V := f^{-1}(1)$ nichtleere, offene Teilmengen von X und es gilt $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = X$, sodass X per Definition nicht zusammenhängend ist. □

Sei $(a,b) \in X \times Y$ und $f \colon X \times Y \to \{0,1\}$ eine beliebige stetige Abbildung. Wir müssen zeigen, dass f konstant (also nicht surjektiv) ist. Betrachte die stetige surjektive Abbildung

$$\iota \colon X \longrightarrow X \times \{b\}$$

gegeben durch $\iota(x) = (x, b)$. Dann ist die Abbildung $f\big|_{X\times\{b\}} \circ \iota$ stetig und konstant (da X zusammenhängend ist). Somit ist jedoch auch $f\big|_{X\times\{b\}}$ konstant.

Analog sei für jedes $x \in X$ eine stetige surjektive Abbildung

$$\iota_x \colon Y \longrightarrow \{x\} \times Y$$

durch $\iota_x(y) = (x, y)$ gegeben. Dann ist $f\big|_{\{x\}\times Y} \circ \iota_x$ stetig und konstant. Folglich ist auch $f\big|_{\{x\}\times Y}$ konstant. Wegen $(x, b) \in X \times \{b\} \cap \{x\} \times Y$ ist f eingeschränkt auf

$$T_x := X \times \{b\} \cup \{x\} \times Y$$

ebenfalls konstant.

Für alle $x \in X$ gilt $(a, b) \in T_x$ und

$$X \times Y = \bigcup_{x\in X} T_x,$$

also folgt, dass f auf ganz $X \times Y$ konstant ist. Damit ist gezeigt, dass $X \times Y$ zusammenhängend ist.

(c) Wir nehmen an, dass $\prod_{i\in I} X_i$ wegzusammenhängend ist. Seien x und y zwei Punkte in X_j für ein beliebiges Element $j \in I$. Nach Definition von Wegzusammenhang ist $\prod_{i\in I} X_i$ nicht leer. Wählen wir ein beliebiges $z \in \prod_{i\in I} X_i$, und definieren $x', y' \in \prod_{i\in I} X_i$ sodass $x'_i = x$, $y'_i = y$ und $x'_j = y'_j = z_j$ für alle $j \neq i$. Dann gibt es einen Weg

$$\gamma \colon [0, 1] \to \prod_{i\in I} X_i$$

von x' nach y'. Die Verknüpfung $p_i \circ \gamma$ mit der i-ten Projektionsabbildung p_i ist ein Weg von x nach y.

Für die Umkehrung, seien $\{(x_i)\}_{i\in I}$ und $\{(y_i)\}_{i\in I}$ zwei Punkte in $\prod_{i\in I} X_i$. Da alle Menge X_i wegzusammenhängend sind, gibt es Wege $\gamma_i \colon [0, 1] \to X_i$ von x_i zu y_i. Die Funktion

$$\gamma = \prod_{i\in I} \gamma_i$$

ist stetig, weil ihre Verknüpfung mit jeder Projektion stetig ist. Diest ist ein Weg von $\{(x_i)\}_{i\in I}$ nach $\{(y_i)\}_{i\in I}$.

(d) Die eine Implikation folgt ähnlich wie in (b). Zeigen wir jetzt die andere Richtung, d.h. dass das Produkt $\Pi_{i\in I} X_i$ zusammenhängender Räume X_i zusammenhängend ist. Wir verfahren ähnlich wie in (b): sei eine stetige Funktion $f \colon \Pi_{i\in I} X_i \to \{0, 1\}$ gegeben. Es genügt zu zeigen, dass f konstant ist. Seien beliebige $x, y \in \Pi_{i\in I} X_i$ gegeben. Es genügt zu zeigen, dass $f(x) = f(y)$. Falls sich x und y nur in endlich vielen Koordinaten unterscheiden, verfahren wir genau wie in (b)! Ansonsten: $f^{-1}(f(x))$ ist eine offene Teilmenge in der Produkttopologie. Da Kästchen (endliche Schnitte von Zylindern) eine Basis der Produkttopologie bilden, gibt es ein Kästchen U mit $x \in U \subset f^{-1}(f(x))$. Nach Definition eines Kästchnes gibt es eine Teilmenge $J \subset I$ mit endlichem Komplement $I \setminus J$, sodass wir für einen Punkt in U alle Koordinaten aus J ändern können, und der so entstehende Punkt immer noch in U liegt. Auf diese Weise konstruieren wir einen Punkt $x' \in U$, der sich von y nur in endlich vielen Koordinaten unterscheidet. Nun gilt $f(x) = f(x')$, da $x, x' \in U$, und $f(x') = f(y)$ nach der Argumentation in (b). Es folgt wie gewünscht $f(x) = f(y)$.

Übung 7. Die *Cantor-Menge* $C \subseteq \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert. Sei

$$C_1 := [0, 1] \quad \text{und} \quad C_n := \frac{1}{3} C_{n-1} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} C_{n-1} \right).$$

Nachfolgend sind C_1 bis C_7 abgebildet.

Dann ist die Cantor-Menge definiert durch

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge kompakt ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge überabzählbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponenten von C jeweils nur aus einem Punkt bestehen (d.h. C ist *total unzusammenhängend*), aber C keine isolierten Punkte hat. Hier heisst ein Punkt x eines topologischen Raums *isoliert*, falls $\{x\}$ offen ist.

(d) ($\star\star\star$) Zeigen Sie, dass jeder nicht-leere, total unzusammenhängende, metrisierbare, kompakte topologische Raum X ohne isolierte Punkte homöomorph zu C ist. Zum Aufwärmen kann man z.B. zeigen, dass C zu $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ homöomorph ist, wobei $\{0,1\}$ die diskrete Topologie trägt.

Lösung für Übung 7:

(a) Nach Definition ist die Cantor-Menge der Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen und somit abgeschlossen. Da die Cantor-Menge beschränkt ist, ist sie nach dem Satz von Heine-Borel kompakt.

(b) Für jede Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ definieren wir

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \frac{2}{3^m}.$$

Alle solche x sind verschieden und in allen C_m und somit in C enthalten. Da es überabzählbar viele 0-1-Folgen gibt, ist die Cantor-Menge C überabzählbar.

(c) Wir nehmen widerspruchsweise an, dass es eine Zusammenhangskomponente in C gibt, welche mindestens zwei verschiedene Punkte x und y enthält. Bezeichne den Abstand dieser zwei Punkte (in der Standardmetrik) mit $\delta > 0$. Die Mengen C_n sind eine disjunkte Vereinigung von (abgeschlossenen) Intervallen der Länge $\frac{1}{3^{n-1}}$. Somit liegen die beiden Punkte x und y für n genügend gross (abhängig von δ) in unterschiedlichen Intervallen von C_n. Da $C \subseteq C_n$ gilt, können diese zwei Punkte somit nicht in derselben Zusammenhangskomponente von C liegen, im Widerspruch zur Annahme.

(d) Dies ist ein Satz von Brouwer. Sie können einen Beweis online finden. Für die Aufwärmübung zeigen Sie, dass die Abbildung in der Lösung von (b) ein Homöomorphismus ist.

* * *

Serie 4

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Seien X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi\colon X \to X/\sim$, $x \mapsto [x]$. Zeigen Sie:

(a) Die Quotiententopologie
$$\mathcal{O}_{X/\sim} \coloneqq \{U \subseteq X/\sim \mid \pi^{-1}(U) \text{ ist offen in } X\}$$
ist eine Topologie auf $X/\sim$.

(b) Die Abbildung π ist stetig.

(c) $\mathcal{O}_{X/\sim}$ ist die grösste (auch *feinste* genannt) Topologie auf $X/\sim$, sodass π stetig ist, d.h. falls $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $X/\sim$ ist, sodass π stetig ist, dann gilt $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{X/\sim}$.

(d) Für einen topologischen Raum Y ist eine Funktion $f\colon X/\sim \to Y$ genau dann stetig, falls die Verknüpfung $f \circ \pi\colon X \to Y$ stetig ist.

Lösung für Übung 1:

(a) Es gilt $\pi^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ und $\pi^{-1}(X/\sim) = X$, also $\varnothing, X/\sim \in \mathcal{O}_{X/\sim}$. Seien $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{O}_{X/\sim}$. Dann sind $\pi^{-1}(U_i) \subseteq X$ offen für alle $i \in I$ und
$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} \pi^{-1}(U_i)$$
ist offen als Vereinigung in X offener Mengen, also $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}_{X/\sim}$. Für $U, V \in \mathcal{O}_{X/\sim}$ ist
$$\pi^{-1}(U \cap V) = \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) \subseteq X$$
offen als Durchschnitt in X offener Mengen, also $U \cap V \in \mathcal{O}_{X/\sim}$.

(b) Für alle $U \in \mathcal{O}_{X/\sim}$ ist per Definition der Quotiententopologie $\pi^{-1}(U)$ offen in X, also π stetig.

(c) Sei $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $X/\sim$, sodass π stetig ist, und sei $U \in \mathcal{O}$. Dann ist $\pi^{-1}(U) \subseteq X$ offen wegen der Stetigkeit, also $U \in \mathcal{O}_{X/\sim}$.

(d) Wir zeigen, dass eine Abbildung $f\colon X/\sim \to Y$ genau dann stetig ist, wenn die Abbildung $f \circ \pi\colon X \to Y$ stetig ist.

Als erstes ist es klar, dass die Abbildung $f \circ \pi\colon X \to Y$ stetig ist, wenn $f\colon X/\sim \to Y$ stetig ist, da $\pi\colon X \to X/\sim$ stetig ist. Sei jetzt $f\colon X/\sim \to Y$ eine Abbildung, die $f \circ \pi$ stetig erfüllt. Für alle offene Menge $\mathcal{V} \subset Y$ haben wir, dass $(f \circ \pi)^{-1}(\mathcal{V})$ offen ist. Das heisst, dass $\pi^{-1}(f^{-1}(\mathcal{V}))$ offen ist. Aber folgt aus der Definition der Topologie auf $X/\sim$, dass $f^{-1}(\mathcal{V})$ offen ist.

Übung 2. Für $n \in \mathbb{N}$, sei $\mathbb{D}^n = \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| \leqslant 1\}$ mit der Euklidischen Topologie ausgestattet. Wir betrachten die Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben durch
$$v \sim w \Leftrightarrow v = w \text{ oder } |v| = |w| = 1.$$
Finden Sie einen zu $\mathbb{D}^n/\sim$ homöomorphen Teilraum eines $\mathbb{R}^m$.

Lösung für Übung 2: Wir betrachten die folgende stetige Abbildung zwischen $\mathbb{D}^n$ und $\mathbb{S}^n \coloneqq \{w = \{w_1, \dots, w_{n+1}\} \in \mathbb{R}^n \mid w|^2 = |w_1|^2 + \dots + |w_{n+1}|^2 = 1\}$:
$$f\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^n,\ (v_1, \dots, v_n) \to (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n, 1 - 2|v|),$$

mit $\lambda = \sqrt{(4-4|v|)/|v|}$ wenn $|v| \neq 0$ und $\lambda = 0$ wenn $|v| = 0$. Man zeigt, dass für alle $v \in \mathbb{D}^n$,

$$|f(v)| = \sum_{i=1}^{n} \lambda^2 v_1^2 + (1-2|v|)^2 = \lambda^2 |v|^2 + (1-2|v|)^2 = 1.$$

Ausserdem haben wir, dass für alle v mit $|v| = 1$ $f(v) = (0, \dots, 0, -1)$. Also induziert f eine stetige Abbildung

$$g\colon \mathbb{D}^\kappa / \sim \to \mathbb{S}^n.$$

Es ist klar, dass g bijektiv ist. Wir sollen auch zeigen, dass g eine Homöomorphismus ist. Das folgt aus dem Homöomorphismuskriterium (Satz 6.5 aus der Vorlesung in Woche 4). Der Topologische Raum $\mathbb{D}/\sim$ ist kompakt als Quotient eines kompakten Raums und $\mathbb{S}^n$ ist Hausdorff als Unterraum von $\mathbb{R}^{n+1}$.

Übung 3. (Der Torus) Zeigen Sie, dass der topologische Produktraum $X_1 = S^1 \times S^1$ homöomorph zum Quotientenraum $X_2 = Q/\sim$ ist, den man erhält, wenn man auf $Q = [0,1] \times [0,1]$ die Äquivalenzrelation $(s,0) \sim (s,1)$ für alle $s \in [0,1]$ und $(0,t) \sim (1,t)$ für alle $t \in [0,1]$ betrachtet. Dies sind zwei mögliche (äquivalente) Definitionen des Torus T^2.

Lösung für Übung 3: Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] \times [0,1] &\to S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^4, \\ (s,t) &\mapsto (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)). \end{aligned}$$

Es ist leicht zu sehen, dass f eine stetige Abbildung ist. Ausserdem gilt

$$f(s,0) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), 1, 0) = f(s,1)$$

für alle $s \in [0,1]$ und analog $f(0,t) = f(1,t)$ für alle $t \in [0,1]$. Die Abbildung f induziert also eine stetige Abbildung $\tilde{f}\colon X_2 \to S^1 \times S^1$ auf dem Quotientenraum $X_2 = Q/\sim$ (hier haben wir die universelle Eigenschaft der Quotiententopologie verwendet). Wir wollen zeigen, dass $\tilde{f}$ ein Homöomorphismus ist. Es ist einfach zu überprüfen, dass $\tilde{f}$ bijektiv ist, daher folgt die Aussage aus dem Homöomorphismuskriterium (Satz 6.5 aus der Vorlesung in Woche 4), da X_2 kompakt ist (als Quotient eines kompakten Raums, also als Bild eines kompakten Raums unter der Quotientenabbildung) und $S^1 \times S^1$ ein Hausdorffraum ist (als Unterraum von $\mathbb{R}^4$, was ein Hausdorffraum ist).

Übung 4. (Der reelle projektive Raum) Zeigen Sie, dass die unten definierten topologischen Räume X_1, X_2 und X_3 homöomorph sind. Dies sind drei mögliche (äquivalente) Definitionen des projektiven Raums $\mathbb{RP}^2$.

(a) Sei $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ die zweidimensionale Einheitssphäre. Wir betrachten auf S^2 die Äquivalenzrelation $\sim$, welche die Antipoden auf S^2 identifiziert, d.h. $u \sim v$ wenn $u = v$ oder $u = -v$. Dann ist der topologische Raum X_1 definiert als der Quotientenraum $X_1 := S^2/\sim$.

(b) Wir betrachten die zweidimensionale Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ und die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{D}^2$, welche die Antipoden auf ihrem Rand identifiziert, d.h. $u \sim v$ wenn $u = v$ oder $u = -v$ für $u, v \in \partial\mathbb{D}^2$. Der topologische Raum X_2 ist dann der Quotientenraum $X_2 := \mathbb{D}^2/\sim$.

(c) Sei $\mathcal{L}$ die Menge der Geraden in $\mathbb{R}^3$, die durch den Ursprung gehen. Für $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ sei $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ der Winkel zwischen L_1 und L_2 und wir definieren $d(L_1, L_2) := \alpha$. Dann definieren wir den topologischen Raum X_3 als $\mathcal{L}$ mit der durch d induzierten Topologie.

Lösung für Übung 4: Wir zeigen zunächst, dass X_1 homöomorph zu X_2 ist. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{D}^2 \subseteq \mathbb{R}^2 &\to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3, \\ (x,y) &\mapsto \left(x, y, \sqrt{1-(x^2+y^2)}\right). \end{aligned}$$

Die Abbildung f bildet $\mathbb{D}^2$ homöomorph auf die nördliche Halbkugel $\{(x,y,z) \in S^2 \mid z \geqslant 0\}$ von S^2 ab. Wir bezeichnen mit $p\colon S^2 \to S^2/\sim = X_1$ und $q\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2/\sim = X_2$ die entsprechenden Quotientenabbildungen. Beachten

Sie, dass $p \circ f(u) = p \circ f(v)$ für alle $u \sim v$ in $\mathbb{D}^2$ gilt. Die Abbildung $p \circ f$ induziert daher eine stetige Abbildung $g\colon X_2 \to X_1$ auf dem Quotientenraum X_2, d.h. das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^2 & \xrightarrow{f} & S^2 \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X_2 & \xrightarrow{g} & X_1. \end{array}$$

Es ist einfach zu überprüfen, dass die Abbildung g bijektiv ist, also impliziert wie in Übung 3 das Homöomorphismuskriterium (Satz 6.5 aus der Vorlesung in Woche 4), dass g ein Homöomorphismus ist, wie wir es wollten. In der Tat ist X_2 kompakt (als Quotient des kompakten Raums $\mathbb{D}^2$) und X_1 ist ein Hausdorffraum. Um zu sehen, dass X_1 ein Hausdorffraum ist, können wir für beliebige $u, v \in S^2$ mit $p(u) \neq p(v)$ offene Umgebungen $U, V \subseteq S^2$ von u, v finden, die symmetrisch bezüglich des Ursprungs sind (d.h. $U = -U$ und $V = -V$) und so, dass $U \cap V = \varnothing$. Dann sind $p(U)$, $p(V)$ disjunkte offene Umgebungen von $p(u)$ und $p(v)$.

Wir zeigen nun, dass X_1 homöomorph zu X_3 ist. Wir betrachten dazu die Abbildung $h\colon S^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \to X_3$, wobei $h(u)$ für alle $u \in S^2$ definiert ist als die Gerade, die durch u und den Ursprung in $\mathbb{R}^3$ verläuft. Dann ist h stetig und surjektiv. Ausserdem gilt $h(u) = h(v)$ genau dann, wenn $u = v$ oder $u = -v$ ist. Daher induziert h eine bijektive, stetige Abbildung $\tilde{h}\colon X_1 \to X_3$ auf dem Quotientenraum $X_1 = S^2/\sim$. Daraus folgt wiederum durch das Homöomorphismuskriterium (X_1 ist kompakt, da Quotient von S^2, und X_3 ist Hausdorff, da metrischer Raum), dass $\tilde{h}$ ein Homöomorphismus ist, womit der Beweis abgeschlossen ist.

Übung 5. Sei X ein topologischer Raum und sei $\Delta := \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$ die Diagonale von $X \times X$.

(a) Zeigen Sie, dass X genau dann ein Hausdorffraum ist, wenn Δ in $X \times X$ abgeschlossen ist.

(b) Sei $\sim$ eine beliebige Äquivalenzrelation auf X und definiere $R := \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$. Angenommen, $\pi\colon X \to X/\sim$ ist *offen*, d.h. das Bild $\pi(U)$ einer jeden offenen Menge $U \subseteq X$ ist offen in $X/\sim$. Zeigen Sie, dass $X/\sim$ genau dann ein Hausdorffraum ist, wenn R in $X \times X$ abgeschlossen ist.

Lösung für Übung 5:

(a) Angenommen X ist Hausdorff. Wir zeigen, dass $Y := (X \times X) \setminus \Delta$ offen ist. Sei $(x, y) \in Y$, dann sind $x, y \in X$ verschiedene Elemente. Weil X Hausdorff ist, gibt es offene Mengen U_x, U_y sodass $x \in U_x, y \in U_y$ und $U_x \cap U_y = \varnothing$. Dann $(x, y) \in U_x \times U_y \subseteq Y$. Also ist Y offen.

Angenommen Y ist offen. Dann ist für jede $x \neq y \in X$ das Paar $(x, y) \in Y$. Da Y offen ist, gibt es offene Mengen $U_x, U_y \subseteq X$ sodass $(x, y) \in U_x \times U_y \subset Y$. Es folgt: $x \in U_x, y \in U_y$ und $U_x \cap U_y = \varnothing$. Also ist X Hausdorff.

(b) Wir müssen zeigen, dass R abgeschlossen ist gdw. $(\pi \times \pi)(R) = \Delta \subset (X/\sim \times X/\sim)$ abgeschlossen ist. Dann können wir Teil (a) benutzen.

Angenommen R ist abgeschlossen. Weil π offen ist, ist auch $\pi \times \pi$ offen: wenn $O \subset X \times X$ offen ist, schreiben wir $O = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$ und

$$(\pi \times \pi)(O) = (\pi \times \pi)\left(\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i\right) = \bigcup_{i \in I} \pi(U_i) \times \pi_i(V_i)$$

ist auch offen. Insbesondere ist

$$(\pi \times \pi)((X \times X) \setminus R) = (X/\sim \times X/\sim) \setminus (\pi \times \pi)(R)$$

offen, und so ist $(\pi \times \pi)(R)$ abgeschlossen.

Angenommen $(\pi \times \pi)(R)$ ist abgeschlossen, so ist $(X/\sim \times X/\sim) \setminus (\pi \times \pi)(R)$ offen. Weil π stetig ist, ist auch $\pi \times \pi$ stetig. Insbesondere ist

$$(\pi \times \pi)^{-1}((X/\sim \times X/\sim) \setminus (\pi \times \pi)(R)) = (X \times X) \setminus R$$

offen, und so ist R abgeschlossen.

Übung 6. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und sei ∞ ein abstraktes Symbol, welches nicht in X enthalten ist. Wir definieren die *Einpunktkompaktifizierung* (auch *Alexandroff-Kompaktifizierung* genannt) $\widehat{X}$ von X als die Menge $X \cup \{\infty\}$ mit der Topologie

$$\mathcal{O}_{\widehat{X}} \coloneqq \mathcal{O}_X \cup \{\{\infty\} \cup (X \setminus K) \mid K \subseteq X \text{ kompakt und abgeschlossen}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\widehat{X}$ ein kompakter topologischer Raum ist.

(b) Finden Sie für die Einpunktkompaktifizierung $\widehat{X}$ folgender topologischer Räume einen Teilraum eines $\mathbb{R}^m$, zu dem sie homöomorph sind:

(i) $X = [0, 1)$
(ii) $X = (0, 1)$
(iii) $X = [0, 1]$
(iv) $X = \mathbb{R}^n$.

Lösung für Übung 6:

(a) Es ist relativ einfach zu sehen, dass $\left(\widehat{X}, \mathcal{O}_{\widehat{X}}\right)$ ein topologischer Raum ist. Für die Kompaktheit sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $\widehat{X}$. Dann gibt es ein $k \in I$ mit $\infty \in U_k$ und somit ist $U_k = \{\infty\} \cup (X \setminus K)$ für ein kompaktes und abgeschlossenes $K \subseteq X$. Dann ist

$$\bigcup_{i \in I \setminus \{k\}} U_i = \widehat{X} \setminus U_k = K$$

eine offene Überdeckung der kompakten Teilmenge K von X. Es gibt also eine endliche Teilüberdeckung dieser Menge und somit auch von $\widehat{X}$.

(b) Für (iii), es ist einfach zu sehen, dass $\widehat{X} \cong X \cup \{\infty\}$ für kompakte topologische Räume.
Für die andere Punkte, wir werden das folgendes benutzen:

Lemma 1. *Sei Y ein topologischer Raum, der Hausdorff und kompakt ist. Sei $y \in Y$ und $X \coloneqq Y \setminus \{y\}$. Dann $\widehat{X} \cong Y$.*

Wir leiten daraus ab:

(i) $\widehat{X} = \widehat{[0,1)} \cong [0, 1]$
(ii) $\widehat{X} = \widehat{(0,1)} \cong S^1$
(iii) $\widehat{X} = \widehat{[0,1]} \cong [0, 1] \cup \{\infty\}$
(iv) $\widehat{X} = \widehat{\mathbb{R}^n} \cong S^n$.

In (iv) benutzen wir auch, dass $S^n \setminus \{e_n\} \cong \mathbb{R}^n$: dies ergibt sich aus der gleichen Konstruktion wie das Homöomorphismus $\mathbb{D}^n/\sim \cong S^n$.

Beweis des Lemmas. Wir betrachten die folgende Abbildung:

$$f : \widehat{X} \to Y : p \mapsto \begin{cases} p & \text{wenn } p \in X; \\ y & \text{wenn } p = \infty. \end{cases}$$

Wir zeigen zuerst, dass f stetig ist. Sei $U \subset Y$ eine offene Menge. Wenn $y \notin U$, ist $U \subset X \subset Y$ eine offene Menge von X, darum ist $f^{-1}(U) = U \subset X \subset \widehat{X}$ auch offen. Wenn $y \in U$, ist $Y \setminus U$ eine abgeschlossene Menge von $X \subset Y$, die auch kompakt ist (weil eine abgeschlossene Menge in einem kompakten Raum auch kompakt

ist). Darum ist $f^{-1}(Y \setminus U) = Y \setminus U \subset X \subset \widehat{X}$ kompakt und abgeschlossen. Nach der Definition der Topologie von $\widehat{X}$, ist

$$f^{-1}(U) = \widehat{X} \setminus f^{-1}(Y \setminus U) \subset \widehat{X}$$

offen.

Dann ist f eine stetige bijektive Abbildung vom kompakten Raum $\widehat{X}$ auf den Hausdorffraum Y. Daraus folgt durch das Homöomorphismuskriterium, dass f ein Homöomorphismus ist. □

* * *

Serie 5

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn eine Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf dem Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Sei X ein topologischer Raum und CX der Kegel über X. Zeigen Sie, dass CX wegzusammenhängend ist.

Lösung für Übung 1: Sei $p = [(x, 1)]$ für beliebiges $x \in X$ die „Spitze" des Kegels $CX = X \times [0, 1]/X \times \{1\}$. Wir zeigen, dass es von jedem beliebigen Punkt in CX einen Weg nach p gibt. Daraus folgt die Behauptung. Sei also $[(x, t)]$ ein beliebiger Punkt in CX und sei $\alpha\colon [0, 1] \to X \times [0, 1]$ definiert durch $s \mapsto (x, 1 + s(t - 1))$. Dann ist α offenbar stetig und somit ein Weg von $(x, 1)$ nach (x, t) in $X \times [0, 1]$. Verknüpft mit der Projektion $\pi\colon X \times [0, 1] \to CX$ erhalten wir einen Weg $\pi \circ \alpha$ in CX von p nach $[(x, t)]$ wie gewünscht.

Übung 2. Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ den Kegel CS^n und die Suspension ΣS^n bis auf Homöomorphie.

Lösung für Übung 2: Es gilt $CS^n \cong \mathbb{D}^{n+1}$ und $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Für CS^n, sehen wir S^n als Untermenge von $\mathbb{D}^{n+1}$, und betrachten wir die Abbildung

$$f\colon S^n \times [0, 1] \to \mathbb{D}^{n+1}, (x, t) \mapsto (1 - t)x.$$

Die auf CS^n induzierte Abbildung ist ein Homöomorphismus: f ist stetig, die induzierte Abbildung ist bijektiv, CS^n ist kompakt, und $\mathbb{D}^{n+1}$ ist Hausdorff.

Für ΣS^n, benutzen wir Übung 3 (a) und (b).

Übung 3.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi\colon S^{n-1} \subseteq \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$, $x \mapsto x$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{D}^n \cup_\varphi \mathbb{D}^n$ homöomorph zu S^n ist.

(b) Sei X ein topologischer Raum und CX der Kegel über X. In welchem Sinne kann man CX mit CX verkleben, sodass man ΣX bekommt?

Lösung für Übung 3:

(a) Wie betrachten die Abbildung

$$g\colon \mathbb{D}^n + \mathbb{D}^n \to S^n,$$
$$g(v) = \begin{cases} \left(v, \sqrt{1 - |v|^2}\right) & v \in \mathbb{D}^n + \emptyset \\ \left(v, -\sqrt{1 - |v|^2}\right) & v \in \emptyset + \mathbb{D}^n \end{cases}$$

Die auf $\mathbb{D}^n \cup_\varphi \mathbb{D}^n$ induzierte Abbildung ist ein Homöomorphismus: g ist stetig, die induzierte Abbildung ist bijektiv, $\mathbb{D}^n \cup_\varphi \mathbb{D}^n$ ist kompakt, und S^n ist Hausdorff.

(b) Sei $\varphi\colon X \times \{0\} \subseteq CX = X \times [0, 1]/X \times \{1\} \to CX$ die Abbildung $(x, 0) \mapsto (x, 0)$. Dann ist $CX \cup_\varphi CX \cong \Sigma X$.

Übung 4. Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G, versehen mit einer Topologie, bezüglich der die Abbildungen

$$G \times G \to G, (g, g') \mapsto gg' \text{ und } G \to G, g \mapsto g^{-1}$$

stetig sind. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für jedes $g_0 \in G$ sind die *Rechtstranslation* $R_{g_0}\colon G \to G, g \mapsto gg_0$ und die *Linkstranslation* $L_{g_0}\colon G \to G, g \mapsto g_0 g$ Homöomorphismen.

(b) Die Stetigkeit der genannten Abbildungen ist äquivalent zu der Stetigkeit der *einen* Abbildung $G \times G \to G$, $(g, g') \mapsto g^{-1}g'$.

(c) Sei $GL_n(\mathbb{R})$ mit der Topologie versehen, die von der Inklusion $GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ kommt. Zeigen Sie, dass $GL_n(\mathbb{R})$ eine topologische Gruppe ist.

(d) Die Topologie auf G ist schon eindeutig bestimmt durch eine Umgebungsbasis des Einselementes e. Hier ist eine *Umgebungsbasis* von e eine Familie von Umgebungen von e, sodass jede Umgebung von e eine Menge aus der Familie enthält.

(e) Ein Homomorphismus von topologischem Gruppen ist stetig dann und nur dann, wenn er beim Einselement stetig ist. Hier ist eine Funktion *stetig bei* e, wenn das Urbild jeder Umgebung des Bildes von e eine Umgebung von e ist.

(f) ($\star$) Jede offene Untergruppe $H \subset G$ ist abgeschlossen.

(g) Ist $H \subset G$ eine normale Untergruppe, so ist die Quotientengruppe G/H mit der Quotiententopologie wieder eine topologische Gruppe.

Lösung für Übung 4:

(a) Sei $g_0 \in G$ beliebig. Die Rechtstranslation $G \to G, g \mapsto gg_0$ ist die Verknüpfung von $G \to G \times G, g \mapsto (g, g_0)$ mit der gegebenen Abbildung $G \times G \to G$, also ist sie auch stetig. Die Linkstranslation ist auch stetig aus dem gleichen Gründen. Jetzt sehen wir, dass die Linkstranslation $G \to G, g \mapsto g_0^{-1}g$ stetig ist und die Inverse von der Rechtstranslation $G \to G, g \mapsto gg_0$. Es folgt, dass die Rechtstranslation eine Homöomorphismus ist.

(b) Wenn die Abbildung $m : G \times G \to G, (g, g') \mapsto g^{-1}g'$ stetig ist, haben wir, dass die Abbildung $G \to G, g \mapsto g^{-1}$ stetig ist, da sie (ähnlich wie in (a)) eine Verknüpfung der Abbildung $(g, g') \mapsto g^{-1}g'$ mit $G \to G \times G, g \mapsto (g, e)$ ist. Die Komposition der zwei stetigen Abbildungen $G \times G \to G \times G, (g, g') \mapsto (g^{-1}, g')$ und $G \times G \to G, (g, g') \mapsto g^{-1}g'$ ist die Abbildung $G \times G, (g, g') \mapsto gg'$. Also ist diese auch stetig.

Wenn die zwei Abbildungen $G \times G \to G$, $(g, g') \mapsto gg'$ und $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ stetig sind, haben wir aus dem gleichen Gründen wie oben, dass die Abbildung $G \times G \to G, (g, g') \mapsto g^{-1}g'$ auch stetig ist.

(c) Da die Formeln für das Inverse einer Matrix und für das Produkt zweiter Matrix stetig sind, folgt, dass $GL_n(\mathbb{R})$ eine topologische Gruppe ist.

(d) Für beliebige $g \in G$ ist die Abbildung R_g ein Homöomorphismus, der e auf g schickt. Also schickt er auch eine Umgebungsbasis von e auf eine Umgebungsbasis von g. Insofern bestimmt eine Umgebungsbasis von e Umgebungsbasen für alle Punkte, und damit die Topologie.

(e) Dies folgt aus den gleichen Gründen wie (d).

(f) Sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Da R_g eine Homöomorphismus ist, ist $R_g(H)$ auch offen ist. Aber die Menge

$$G \backslash H = \bigcup_{g \notin H} R_g(H)$$

ist offen. Das heisst, dass H abgeschlossen ist.

(g) Wir zeigen das folgende Lemma.

Lemma 1. *Die Quotientenabbildung*

$$\pi\colon G \to G/H$$

ist offen.

Beweis. Sei $U \in G$ eine offene Menge. Wir wollen zeigen, dass $\pi(U) \subset {}^{G}\!/_{H}$ auch offen ist. Dies ist äquivalent zu $\pi^{-1}(\pi(U)) \subset G$ offen, da ${}^{G}\!/_{H}$ die Quotiententopologie trägt. Aber

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{h \in H} hU$$

ist die Vereinigung offener Mengen (unter Verwendung von (a)), also ist $\pi^{-1}(\pi(U))$ auch offen. □

Wir wollen zeigen, dass die Abbildung

$$\widetilde{m} : \left({}^{G}\!/_{H}, {}^{G}\!/_{H}\right) \to {}^{G}\!/_{H},\ (gH, g'H) \mapsto g^{-1}g'H$$

stetig ist. Sei $U \subset {}^{G}\!/_{H}$ eine offene Menge, dann

$$\begin{aligned}\widetilde{m}^{-1}(U) &= \{(gH, g'H) \mid g^{-1}g'H \in U\}\\ &= \{(gH, g'H) \mid g^{-1}g' \in \pi^{-1}(U)\}\\ &= \pi\left(\{(g, g') \mid g^{-1}g' \in \pi^{-1}(U)\}\right)\\ &= \pi(m^{-1}(\pi^{-1}(U))).\end{aligned}$$

Nach der Definition des Quotiententopologie ist $\pi^{-1}(U)$ offen. Also ist $m^{-1}(\pi^{-1}(U))$ offen, weil m stetig ist. Und $\pi(m^{-1}(\pi^{-1}(U)))$ ist offen, weil π offen ist. Also ist $\widetilde{m}$ stetig.

Übung 5. Sei X ein Hausdorffraum und K eine kompakte Teilmenge von X. Zeigen Sie:

(a) Der Quotientenraum X/K ist ein Hausdorffraum.

(b) Sei $A \subsetneq K$ eine offene Teilmenge von X. Dann ist die durch $f([x]_A) = [x]$ definierte Abbildung

$$f\colon (X \setminus A)/(K \setminus A) \to X/K$$

wohldefiniert und ein Homöomorphismus. Hierbei bezeichnen $[x]_A$ und $[x]$ die Äquivalenzklassen in $(X \setminus A)/(K \setminus A)$ bzw. X/K.

(c) Die Aussage aus (b) stimmt nicht, wenn $A = K$ ist.

(d) Angenommen, X ist kompakt. Dann ist X/K die Einpunktkompaktifizierung von $X \setminus K$. Die Einpunktkompaktifizierung wurde auf Serie 4 definiert.

Lösung für Übung 5:

(a) Wir zeigen zuerst:

Lemma 2. *Sei X ein Hausdorff topologischer Raum, $K \subset X$ eine kompakte Menge, und $x \in X \setminus K$. Dann existieren offene disjunkte Mengen U_K, U_x sodass $K \subset U_K$ und $x \in U_x$.*

Beweis des Lemma. Für jedes $k \in K$, existieren offene disjunkte Mengen V_k, W_k sodass $k \in V_k$ und $x \in W_k$. Weil K kompakt ist, gibt es $k_1, \dots, k_n \in K$ sodass $K \subset U_K \coloneqq \bigcup V_{k_i}$. Dann gilt für U_K und $U_x \coloneqq \bigcap W_{k_i}$ die Aussage. □

Bemerkung 1. *Sie können Ähnliches auch für zwei disjunkte kompakte Mengen zeigen.*

Seien $[x] \neq [y] \in X/K$; insbesondere sind x und y nicht beide in K. Wenn $x, y \notin K$, wählen wir offene disjunkte Mengen $U_x, U_y \subset X$ sodass $x \in U_x, y \in U_y$. Dann haben $U_x \setminus K$ und $U_y \setminus K$ die gleiche Eigenschaften. Weil $\pi^{-1}\pi(U_x \setminus K) = U_x \setminus K$, und da gleiches für y gilt, sind $\pi(U_x \setminus K)$ und $\pi(U_y \setminus K)$ offene disjunkte Mengen von $X/\sim$ sodass $[x] \in \pi(U_x \setminus K)$ und $[y] \in \pi(U_y \setminus K)$.

Wenn $x \notin K$ und $y \in K$, wählen wir durch das Lemma offene disjunkte Mengen $U_x, U_K \subset X$ sodass $x \in U_x$ und $K \subset U_K$. Jetzt haben wir sofort $\pi^{-1}\pi(U_x) = U_x$ und $\pi^{-1}\pi(U_K) = U_K$, und das Argument lässt sich wie im ersten Fall abschliessen.

(b) Sei $i\colon X \setminus A \to X$ die Inklusion, und $\pi_A\colon X \setminus A \to (X \setminus A)/(K \setminus A)$ und $\pi\colon X \to X/K$ die Projektionen. Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X \setminus A & \xrightarrow{\ i\ } & X \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_A} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ (X \setminus A)/(K \setminus A) & \xrightarrow{\ f\ } & X/K \end{array}$$

Weil i stetig ist, ist auch $\pi \circ i = \pi_A \circ f$ stetig, darum ist f stetig. Es ist leicht zu sehen, dass f bijektiv ist: hier benutzen wir, dass ein Punkt $x \in K \setminus A$ existiert, sodass $f([x]_A) = [x] = [K]$.

Wir müssen nur zeigen, dass f offen ist (wir können das Homöomorphismuskriterium nicht benutzen, weil es möglich ist, dass X nicht kompakt ist). Sei $U \subset (X \setminus A)/(K \setminus A)$ offen. Wir müssen zeigen dass $\pi^{-1}(f(U))$ offen ist.

Wenn $[x]_A \notin U$ für jede $x \in K \setminus A$, ist $\pi_A^{-1}(U) \subset X \setminus K$ offen. Aber $X \setminus K$ ist offen in X (weil X ist Hausdorff und K ist kompakt), darum ist $i(\pi_A^{-1}(U))$ auch offen, und $\pi^{-1}(f(U)) = i(\pi_A^{-1}(U))$ ist offen.

Angenommen $[K \setminus A]_A \in U$. Dann ist $i(\pi_A^{-1}(U) \cup A)$ in X offen (weil A offen ist) und darum ist $\pi^{-1}(f(U)) = i(\pi_A^{-1}(U) \cup A)$ auch offen.

(c) Wir betrachten $X = \{x, y\}$ mit einer beliebigen Topologie und $A = K = \{x\}$. Dann hat $(X \setminus A)/(K \setminus A)$ ein Element, und X/K zwei Elemente.

(d) In Serie 4, Übung 6(b), haben wir gezeigt, dass wenn Z kompakt und Hausdorff ist, und $W \coloneqq Z \setminus \{z\}$, dann gilt $\widehat{W} \cong Z$ (siehe die Lösungen von Serie 4). Hier nehmen wir $Z = X/K$, welches in der Tat kompakt (als Quotientenraum vom kompakten Raum X) und Hausdorff (siehe (a)) ist; und $z = [K]$, sodass $W = Z \setminus \{z\} = X/K \setminus [K] \cong X \setminus K$.

Übung 6. In dieser Übung zeigen wir in zwei Schritten, dass für alle Familien kompakter topologischer Räume $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ das Produkt

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

wiederum kompakt ist (in Serie 3, Übung 6 hatten Sie dies für endliche Produkte gezeigt).

(a) ($\star\star$) Zeigen Sie, dass jede Überdeckung des Produktes durch Zylinder eine endliche Teilüberdeckung hat[1].

(b) ($\star\star$) Sei X ein beliebiger topologischer Raum mit Subbasis $\mathcal{B}$. Angenommen, für alle Überdeckungen $\mathcal{V} = \{B_a\}_{a \in A}$ von X mit Elementen B_a von $\mathcal{B}$ (d.h. also $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$) gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(B_{a_1}, \dots B_{a_n})$ von X. Zeigen Sie, dass X dann kompakt ist[2].

Lösung für Übung 6:

(a) Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung durch Zylinder. Jeder dieser Zylinder ist von der Form $\pi_\alpha^{-1}(U)$ mit $U \subset X_\alpha$ für ein gewisses $\alpha \in A$. Für alle $\alpha \in A$ sei $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{U}$ die Teilmenge der Elemente $\pi_\alpha^{-1}(U)$ mit $U \subset X_\alpha$.

Lemma 3. *Es gibt $\alpha \in A$ mit*

$$\bigcup \mathcal{U}_\alpha = X.$$

Beweis. Falls dies nicht gilt, so gibt es $z_\alpha \in X_\alpha$ mit $z_\alpha \notin \pi_\alpha^{-1}(U)$ für alle $\pi_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{U}_\alpha$. Dann liegt aber $(z_\alpha)_\alpha \in \prod_\alpha X_\alpha$ nicht in $\bigcup \mathcal{U}$. Das ist ein Widerspruch. □

Dank dieses Lemmas gibt es $\alpha \in A$ mit $\bigcup \mathcal{U}_\alpha = X$. Das heisst, dass $\{U\}_{\pi_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{U}_\alpha}$ eine Überdeckung von X_α ist. Da X_α kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{U\}_{U \in \mathcal{T}}$ von X_α. Nun ist

$$\bigcup_{U \in \mathcal{T}} \pi_\alpha^{-1}(U) = X$$

eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$.

(b) Wir zeigen zuerst, dass es eine maximale offene Überdeckung $\mathcal{C}$ ohne endliche Teilüberdeckung gibt (maximal bedeutet: $\mathcal{C} \cup \{U\}$ für eine beliebige offene Menge $U \notin \mathcal{C}$ hat eine endliche Teilüberdeckung). Dies folgt aus dem Lemma von Zorn.

Lemma 4 (Lemma von Zorn)**.** *Jede Menge mit einer transitiven, reflexiven und antisymmetrischen Ordnung, in der jede Kette eine obere Schranke hat, besitzt ein maximales Element.*

Mann sieht, dass auf der Menge alle offenen Überdeckungen ohne endliche Teilüberdeckung die Inklusion eine Ordnung ist, welche die Voraussetzungen des Lemmas von Zorn erfüllt. Es folgt, dass es eine maximale offene Überdeckung $\mathcal{C}$ ohne endliche Teilüberdeckung gibt. Die Menge $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ kann nicht eine Überdeckung von X sein, da wir sonst mit der Hypothese zu $\mathcal{B}$ eine endliche Teilüberdeckung finden könnten.

Seien $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ und $U \in \mathcal{C}$ mit $x \in U$. Da $\mathcal{B}$ eine Subbasis ist, gibt es $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ mit

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} B_i \subset U.$$

Für alle $i = 1, \dots, n$ gibt es (wegen der Maximalität von $\mathcal{C}$) eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{C} \cup \{B_i\}$, das heisst es gibt $\{C_1^i, \dots, C_{i_j}^i\} \subset \mathcal{C}$ mit

$$B_i \cup \bigcup_{k=1}^{j_i} C_k^i = X.$$

Nun ist aber

$$U \cup \bigcup_{i,k} C_k^i$$

eine endlich Teilüberdeckung von $\mathcal{C}$, denn

$$U \cup \bigcup_{i,k} C_k^i \supset \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \right) \cup \bigcup_{i,k} C_k^i = X.$$

Das ist ein Widerspruch.

* * *

[1] Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung mit Elemente in $\mathcal{B}$. Für alle $\alpha \in A$ sei $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{U}$ die Teilmenge der Elemente $\pi^{-1}(U)$ mit $U \subset X_\alpha$.
Zeigen Sie, dass es $\alpha \in A$ $\mathcal{U}_\alpha$ eine Überdeckung von $\prod_\alpha X_\alpha$ existiert.

[2] Zeigen Sie zuerst, dass es eine maximale offene Überdeckung $\mathcal{C}$ ohne endliche Teilüberdeckung gibt
(maximal bedeutet: $\mathcal{C} \cup \{U\}$ für eine beliebige offene Menge $U \notin \mathcal{C}$ hat eine endliche Teilüberdeckung).

Serie 6

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1.

(a) Zeigen Sie die folgende Aussage, das sogenannte *Verklebungslemma*: Seien X und Y topologische Räume und sei $X = A \cup B$ eine Überdeckung von X mit abgeschlossenen Mengen $A, B \subseteq X$. Weiter seien $f\colon A \to Y$ und $g\colon B \to Y$ stetige Abbildungen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A \cap B$ und sei $h\colon X \to Y$ definiert durch

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in A, \\ g(x), & \text{falls } x \in B. \end{cases}$$

Dann h ist eine wohldefinierte stetige Abbildung.

Bemerkung: Das Verklebungslemma lässt sich verallgemeinern für eine Überdeckung von X mit endlich vielen abgeschlossenen Mengen, aber auch für eine beliebige Überdeckung von X mit offenen Mengen.

(b) Sei X ein topologischer Raum und seien γ_0 und γ_1 zwei Wege in X mit $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$. Zeigen Sie, dass dann der Weg $\gamma_0\gamma_1$ stetig ist.

(c) Sei X ein topologischer Raum und seien $x, y, z \in X$. Seien γ_0 und γ_0' zwei Wege in X von x nach y und γ_1 und γ_1' zwei Wege in X von y nach z. Zeigen Sie, dass falls $\gamma_0 \simeq \gamma_0'$ und $\gamma_1 \simeq \gamma_1'$ rel Endpunkte gilt, so gilt auch $\gamma_0\gamma_1 \simeq \gamma_0'\gamma_1'$ rel Endpunkte.

Lösung für Übung 1:

(a) Wenn $x \in A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ist h wohldefiniert und wenn $x \in A \cap B$ haben wir $f(x) = g(x)$, also h auch wohldefiniert über $A \cap B$ ist.

Sei F eine abgeschlossene Menge. Dann

$$\begin{aligned} h^{-1}(F) &= (f^{-1}(F) \cap A) \cup (g^{-1}(F) \cap B) \\ &= (F_A \cap A) \cup (F_B \cap B), \end{aligned}$$

mit F_A und F_B zwei abgeschlossenen Mengen, da f und g stetig sind. Es folgt, dass $h^{-1}(F)$ auch abgeschlossen ist.

(b) Dies folgt aus dem Verklebungslemma.

(c) Wegen $\gamma_0 \simeq \gamma_0'$ gibt es eine Homotopie $H_0\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ mit $H_0(s,0) = \gamma_0(s)$, $H_0(s,1) = \gamma_0'(s)$ für alle $s \in [0,1]$ und $H_0(0,t) = x, H_0(1,t) = y$ für alle $t \in [0,1]$. Da weiter $\gamma_1 \simeq \gamma_1'$ gilt, gibt es eine Homotopie $H_1\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ mit $H_1(s,0) = \gamma_1(s)$ und $H_1(s,1) = \gamma_1'(s)$ für alle $s \in [0,1]$ und $H_1(0,t) = y, H_1(1,t) = z$ für alle $t \in [0,1]$. Definiere

$$H\colon [0,1] \times [0,1] \to X, \quad H(s,t) = \begin{cases} H_0(2s,t), & \text{falls } s \in [0,1/2], \\ H_1(2s-1,t), & \text{falls } s \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Wegen $H_0(1,t) = H_1(0,t)$ für alle $t \in [0,1]$ ist H nach Teilaufgabe (a) wohldefiniert und stetig. Weiter ist nach der Definition von $\gamma_0\gamma_1$ und $\gamma_0\gamma_1'$ offensichtlich, dass H eine Homotopie von $\gamma_0\gamma_1$ nach $\gamma_0\gamma_1'$ ist. Somit ist $\gamma_0\gamma_1 \simeq \gamma_0'\gamma_1$ rel Endpunkte bewiesen.

Übung 2. Zeigen Sie, dass $\{5\} \subset \mathbb{Q}$ ein Retrakt von $\mathbb{Q}$ ist, aber kein Deformationsretrakt.

Lösung für Übung 2: Die konstante Abbildung $\mathbb{Q} \to \{5\}, x \mapsto 5$ ist eine Retraktion, also $\{5\}$ ein Retrakt von $\mathbb{Q}$. Da $\mathbb{Q}$ nicht wegzusammenhängend ist, folgt aus Übung 5 (a) der zweite Teil der Aussage.

Übung 3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $\mathrm{id}_{S^n}, p\colon S^n \to S^n$ die stetigen Abbildungen gegeben durch $\mathrm{id}_{S^n}(v) = v$ und $p(v) = -v$.

(a) Zeigen Sie für $n = 1$, dass p homotop zu id_{S^n} ist.

(b) Zeigen Sie für alle ungeraden n, dass p homotop zu id_{S^n} ist.

Lösung für Übung 3: Sei $n = 2k-1$ ungerade. Wir betrachten $S^n \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n$ und schreiben $\underline{x} = (x_1, y_1, \dots, x_k, y_k)$ für die Elemente von S^n. Sei $\nu\colon S^n \to S^n$ die folgende Abbildung:

$$\nu(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k) \coloneqq (y_1, -x_1, \dots, y_k, -x_k).$$

Wir bemerken, dass ν stetig ist, und dass $< \underline{x}, \nu(\underline{x}) >= 0$ für alle $\underline{x} \in S^n$, wobei $< \cdot, \cdot >$ für das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^{n+1}$ steht.

Wir definieren die Homotopie $H\colon S^n \times [0,1] \to S^n$ mithilfe ν durch die folgende Formel:

$$H(\underline{x}, t) \coloneqq \cos(\pi t)\underline{x} + \sin(\pi t)\nu(\underline{x}).$$

Es ist leicht zu sehen, dass H wohldefiniert ist (überprüfen Sie, dass $H(\underline{x}, t) \in S^n$), stetig, und dass $H(\underline{x}, 0) = \underline{x}$, $H(\underline{x}, 1) = -\underline{x}$ für alle $\underline{x} \in S^n$.

Bemerkung 1. *Der Beweis benutzt die Existenz einer stetigen Abbildung $\nu\colon S^n \to S^n$ mit $< \underline{x}, \nu(\underline{x}) >= 0$ für alle $\underline{x} \in S^n$. Solch ein ν heisst unitäres Vektorfeld. Es existiert nicht in S^n für gerade n (dieser Satz wird* Hairy Ball Theorem *genannt).*

Übung 4. Zeigen Sie, dass das Möbiusband homotopieäquivalent zum Zylinder $S^1 \times [0,1]$ ist.

Lösung für Übung 4: Das Möbiusband M wurde in der Vorlesung definiert als der Abbildungstorus $M = [-1,1] \times [0,1]/\alpha$ für die Abbildung

$$\alpha\colon [-1,1] \to [-1,1], x \mapsto -x.$$

Wir behaupten, dass sowohl M als auch der Zylinder $S^1 \times [0,1]$ homotopieäquivalent zu S^1 sind, wobei wir hier $S^1 \cong [0,1]/\sim$ für $0 \sim 1$ benutzen wollen. Eine Homotopieäquivalenz zwischen M und S^1 ist gegeben durch $f\colon M \to S^1, [(x,t)] \mapsto [t]$ mit Homotopieinversem $g\colon S^1 \to M, [t] \mapsto [(0,t)]$.

Überzeugen Sie sich, dass die Abbildungen wohldefiniert und stetig sind. Es gilt $f \circ g = \mathrm{id}_{S^1}$ und $g \circ f \simeq \mathrm{id}_M$ mittels der Homotopie

$$M \times [0,1] \to M, ([(x,t)], s) \to ([x \cdot s, t]).$$

Ähnlich konstruiert man eine Homotopieäquivalenz zwischen $S^1 \times [0,1]$ und S^1, woraus die Behauptung folgt, da Homotopieäquivalenz eine Äquivalenzrelation ist.

Übung 5. Seien X und Y homotopieäquivalente Räume.

(a) Zeigen Sie, dass X genau dann wegzusammenhängend ist, wenn Y wegzusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn Y zusammenhängend ist.

(c) ($\star$) Sei $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Bezeichne $[z]_Z$ und $[z]_W$ die Zusammenhangs- bzw. die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes z in X oder Y. Zeigen Sie, dass $[z]_Z \mapsto [f(z)]_Z$ und $[z]_W \mapsto [f(z)]_W$ Bijektionen zwischen den Zusammenhangskomponenten bzw. den Wegzusammenhangskomponenten von X und Y definieren.

Lösung für Übung 5:

(a) Sei $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz und sei $g\colon Y \to X$ die Homotopieinverse von f, d.h. es gilt $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Angenommen, X ist wegzusammenhängend. Dann ist auch $f(X) \subseteq Y$ wegzusammenhängend und es genügt für jeden Punkt in Y einen Pfad zu einem Punkt in $f(X)$ zu finden. Sei $H\colon Y \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie zwischen $f \circ g$ und id_Y, es gilt also $H(y,0) = f(g(y))$ und $H(y,1) = y$ für alle $y \in Y, t \in [0,1]$. Weiter sei nun $y \in Y$ beliebig. Dann ist $z \coloneqq f(g(y)) \in f(X)$ und $[0,1] \to Y, t \mapsto H(y,t)$ definiert einen Pfad von z nach y, woraus die Behauptung folgt.

(b) Sei $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinversem g wie in (a) und H wiederum eine Homotopie zwischen $f \circ g$ und id_Y. Angenommen, X ist zusammenhängend und es gelte $Y = U \cup V$ für disjunkte, offene Mengen $U, V \subseteq Y$. Dann ist $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ die Vereinigung zweier disjunkter offener Teilmengen von X, also muss nach Voraussetzung (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $f^{-1}(U) = \emptyset$ sein. Wir behaupten, dass daraus $U = \emptyset$ folgt. Zunächst bemerken wir, dass $(f \circ g)(Y) \subseteq V$ gilt. Sei $y \in Y$. Dann ist wiederum $[0,1] \to Y, t \mapsto H(y,t)$ ein Pfad von $f(g(y))$ nach y. Wegen $f(g(y)) \in V$ haben wir somit einen Pfad von y zu einem Punkt in V gefunden und es muss $y \in V$ gelten. Somit gilt für alle $y \in Y$, dass $y \in V$ ist, also $U = \emptyset$ wie gewünscht.

(c) Da stetige Abbildungen Zusammehang und Wegzusammenhang erhalten, induziert jede stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ eine Funktion von der Menge der (Weg-)zusammenhangskomponenten von X in die Menge der (Weg-)zusammenhangskomponenten von Y, wie in (c) angegeben. Wir wollen zeigen, dass

$$[f(g(x))]_Z = [x]_Z, \quad [f(g(x))]_W = [x]_W.$$

Analog folgt dann

$$[g(f(x))]_Z = [x]_Z, \quad [g(f(x))]_W = [x]_W.$$

Das hiesse, dass f und g Inverse sind für die Zusammenhangs- bzw. Wegzusammenhangskomponenten von X und Y. Also würden dann $[z]_Z \mapsto [f(z)]_Z$ und $[z]_W \mapsto [f(z)]_W$ Bijektionen zwischen den Zusammenhangskomponenten bzw. den Wegzusammenhangskomponenten von X und Y definieren.

Sei $H\colon [0,1] \times X \to X$ eine Homotopie mit

$$H(0,\cdot) = \mathrm{Id}_X, \quad H(1,\cdot) = g \circ f.$$

Den Pfad $\gamma(t) \coloneqq H(t,x)\colon [0,1] \to X$ geht von x zu $g(f(x))$. Es folgt, dass x und $g(f(x))$ in den gleichen Zusammenhangs- bzw. Wegzusammenhangskomponente von X sind. Die Aussage folgt.

Übung 6. ($\star$) Zeigen Sie, dass $O_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ ein Deformationsretrakt ist. Die topologische Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$ ist in Serie 5, Übung 4 definiert[1].

Lösung für Übung 6: Das Gram-Schmidt-Verfahren kann als Rechtsmultiplikation mit einer oberen Dreiecksmatrix mit positiven Diagonaleinträgen verstanden werden. Desweiteren hängen die Einträge dieser Matrix, sie sei mit $GS(A)$ bezeichnet, stetig von der zu orthogonalisierenden Matrix A in $GL_n(\mathbb{R})$ ab. D.h. wir können eine Retraktion durch

$$GL_n(\mathbb{R}) \to O_n(\mathbb{R}) : A \mapsto A \cdot GS(A)$$

definieren. Dies ist eine Deformationsretraktion, weil

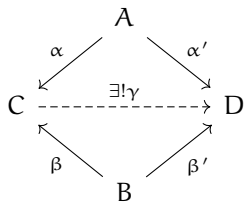
$$GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) : A \mapsto A \cdot GS(A)$$

via folgender Homotopie homotop zur Identität ist:

$$h\colon GL_n(\mathbb{R}) \times [0,1] \to GL_n(\mathbb{R}) : (A,t) \mapsto A \cdot ((1-t)GS(A) + tI_n).$$

(Sie können eine detaillierte Lösung hier finden: `https://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/pub/Kraushar.pdf`, Lemma 2.3.13)

Übung 7. (Koprodukt in der Kategorientheorie) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Seien A und B zwei Objekte von $\mathcal{C}$. Ein *Koprodukt* C von A und B ist ein Objekt von $\mathcal{C}$ mit zwei Morphismen $\alpha \in \mathcal{C}(A, C)$ und $\beta \in \mathcal{C}(B, C)$, sodass folgendes gilt: Für alle Objekte D von $\mathcal{C}$ und Morphismen $\alpha' \in \mathcal{C}(A, D)$ und $\beta' \in \mathcal{C}(B, D)$ **gibt** es einen **eindeutigen** Morphismus $\gamma \in \mathcal{C}(C, D)$ mit $\alpha' = \gamma \circ \alpha$ und $\beta' = \gamma \circ \beta$.



(a) Zeigen Sie, dass das Koprodukt, sofern es existiert, eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus ist. Genauer gesagt: sind C_1 mit α_1, β_1 und C_2 mit α_2, β_2 wie oben beide ein Koprodukt von A und B, so gibt es einen eindeutigen Isomorphismus $f\colon C_1 \to C_2$ mit $f \circ \alpha_1 = \alpha_2$ und $f \circ \beta_1 = \beta_2$.

Bemerkung: Man spricht deshalb auch von dem Koprodukt von A und B, statt einem Koprodukt von A und B.

(b) Bestimmen Sie das Koprodukt von zwei Objekten A und B in den folgenden Kategorien.

(i) $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$.

(ii) $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$.

(iii) $\mathcal{C} = \mathbf{Vek}_{\mathbb{R}}$ (Objekte: alle $\mathbb{R}$-Vektorräume, Morphismen: $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen).

(iv) $\mathcal{C}$ die Kategorien aller topologischen Räumen mit Basispunkt, und Morphismen den basispunkterhaltenden stetigen Abbildungen.

(v) $\mathcal{C}$ ist deine Lieblingskategorie.

(vi) Können Sie eine Kategorie finden, die keine Koprodukte hat?

Lösung für Übung 7:

(a) Sei (C, α, β) ein Koprodukt von A und B. Von der Definition mit $D = C$, $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$ haben wir, dass es einen eindeutigen Morphismus $\gamma \in \mathcal{C}(C, C)$ mit $\alpha' = \gamma \circ \alpha$ und $\beta' = \gamma \circ \beta$ gibt. Aber $1_C \in \mathcal{C}(C, C)$ erfüllt $\alpha = 1_C \circ \alpha$ und $\beta = 1_C \circ \beta$. Es folgt, dass $\gamma = 1_C$.

Sei (D, α', β') ein weiteres Koprodukt von A und B. Dann gibt es einen eindeutigen Morphismus $\gamma \in \mathcal{C}(C, D)$ mit $\alpha' = \gamma \circ \alpha$ und $\beta' = \gamma \circ \beta$, da C ein Koprodukt ist. Der Objekt D ist auch ein Koprodukt, also haben wir einen eindeutigen $\gamma' \in \mathcal{C}(D, C)$ mit $\alpha = \gamma' \circ \alpha'$ und $\beta = \gamma' \circ \beta'$. Man sieht, dass $\gamma' \circ \gamma \in \mathcal{C}(C, C)$ die zwei Gleichungen $\alpha = \gamma' \circ \gamma \circ \alpha$ und $\beta = \gamma' \circ \gamma \circ \beta$ erfüllt. Das heisst, dass $\gamma' \circ \gamma = 1_C \in \mathcal{C}(C, C)$. Aus dem gleichen Grunde haben wir $\gamma \circ \gamma' = 1_D \in \mathcal{C}(D, D)$. Es endet die Übung.

(b) (i) Das Koprodukt von A und B für **Set** ist $(A \sqcup B; i_A, i_B)$ mit $i_A\colon A \to A \sqcup B$ und $i_B\colon B \to A \sqcup B$ die offensichtliche Inklusion (wobei sich $A \sqcup B$ als $\{(a, 0) \mid a \in A\} \cup \{(b, 1) \mid b \in B\} \subset (A \cup B) \times \{0, 1\}$ definieren lässt).

(ii) Das Koprodukt von A und B für **Top** ist der Summenraum $(A + B; i_A, i_B)$ mit $i_A\colon A \to A \cup B$ und $i_B\colon B \to A \cup B$ die offensichtlichen Inklusionen.

(iii) Das Koprodukt von A und B für $\mathbf{Vek}_{\mathbb{R}}$ ist $(A \oplus B; i_A, i_B)$ mit $i_A\colon A \to A \oplus B$ und $i_B\colon B \to A \oplus B$ die offensichtliche Inklusion.

(iv) Das Koprodukt von A und B für $\mathcal{C}$ ist die Wedgesumme $(A \vee B; i_A, i_B)$ mit $i_A\colon A \to A \vee B$ und $i_B\colon B \to A \vee B$ die offensichtlichen Inklusionen.

(v)

(vi) Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie, mit allen zusammenhängenden topologischen Räumen als Objekten und stetigen Abbildungen als Morphismen sind. Es gibt einen Vergissfunktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Top}$, also müsste das Koprodukt von A und B gleich $A + B$ sein. Das ist ein Widerspruch, da $A + B$ nicht zusammenhängend ist.

[1] Benutzen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren.

Serie 7

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Seien X, Y topologische Räume. Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Sei $x_0 \in X$ beliebig und $y_0 \in Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Beweisen Sie die Funktorialität der Fundamentalgruppe, also folgende Aussagen.

(a) $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $[\sigma] \mapsto [f \circ \sigma]$ definiert einen Gruppenhomomorphismus.

(b) $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

(c) Sei Z ein topologischer Raum, $g\colon Y \to Z$ stetig und $z_0 \in Z$ mit $z_0 = g(y_0) = g(f(x_0))$. Dann gilt $(g\circ f)_* = g_* \circ f_*$, wobei $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $g_*\colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Z, z_0)$ und $(g \circ f)_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, z_0)$.

Lösung für Übung 1:

(a) Für $f\colon X \to Y$ stetig ist zu zeigen, dass

$$f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, f(x_0)), \quad [\sigma] \mapsto [f \circ \sigma]$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit von f_*: Falls $[\sigma] = [\sigma']$ gilt, so ist $\sigma \simeq \sigma'$ rel $\{0, 1\}$ via einer Homotopie h. Damit gilt $f \circ \sigma \simeq f \circ \sigma'$ rel $\{0, 1\}$ via $f \circ h$ und insbesondere $[f \circ \sigma] = [f \circ \sigma']$. Wir zeigen noch, dass f_* ein Gruppenhomomorphismus ist: Es gilt

$$f_*([\sigma][\tau]) = f_*([\sigma\tau]) = [f \circ \sigma\tau] = [(f \circ \sigma)(f \circ \tau)] = [f \circ \sigma][f \circ \tau] = f_*([\sigma])g_*([\tau]),$$

wobei wir in der dritten Gleichung $f \circ \sigma\tau = (f \circ \sigma)(f \circ \tau)$ benutzen (was sich leicht mit der Definition der Verknüpfung von Wegen prüfen lässt).

(b) Es gilt $[\mathrm{id}_X \circ \sigma] = [\sigma]$ für alle Schleifen σ an x_0.

(c) Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ stetig und $x_0 \in X$. Wir betrachten die Gruppenhomomorphismen

$$f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0)) \text{ und } g_*\colon \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(Z, g(f(x_0))),$$

wie in (a) definiert, und zeigen $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$: Es gilt für alle Schleifen σ an x_0:

$$(g \circ f)_*([\sigma]) = [(g \circ f) \circ \sigma] = [g \circ (f \circ \sigma)] = g_*([f \circ \sigma]) = g_*(f_*([\sigma])).$$

Übung 2. Sei $A \subseteq X$ ein Retrakt mit Retraktion $\rho\colon X \to A$ und bezeichne $i\colon A \to X$ die Inklusion. Sei $a \in A \subseteq X$.

(a) Zeigen Sie, dass $i_*\colon \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ injektiv ist und $\rho_*\colon \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$ surjektiv ist.

(b) Sei ρ nun eine Deformationsretraktion. Nehmen Sie zusätzlich an, dass die Homotopie $H\colon X \times [0, 1] \to X$ von $H_0 = i \circ \rho$ nach $H_1 = \mathrm{id}_X$ relativ A ist (d.h. für alle $t \in [0, 1], x \in A$ gilt $H_t(x) = x$). Zeigen Sie, dass dann i_* und ρ_* zueinder inverse Gruppenisomorphismen sind.

(c) $(\star)$ Sei ρ eine Deformationsretraktion. Zeigen Sie, dass auch ohne die zusätzliche Annahme in (b) folgt, dass i_* und ρ_* zueinder inverse Gruppenisomorphismen sind.

Eine Deformationsretraktion mit der Zusatzannahme aus (b) wird oft „starke" Deformationsretraktion genannt (z.B. von Jänich). In anderen Quellen (z.B. Hatcher) ist die Zusatzannahme Bestandteil der Definition einer Deformationsretraktion.

Lösung für Übung 2:

(a) Es gilt $\rho \circ i = \mathrm{id}_A$ und somit für die induzierten Homomorphismen

$$\rho_* \circ i_* = (\rho \circ i)_* = (\mathrm{id}_A)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(A,a)}.$$

Also ist i_* injektiv und ρ_* surjektiv.

(b) Nach Voraussetzung gibt es eine Homotopie $H\colon X \times [0,1] \to X$ zwischen $X \to X$, $x \mapsto \rho(x)$ und id_X, sodass $H(x,t) = x$ für alle $x \in A$, $t \in [0,1]$ gilt. Für $[\gamma] \in \pi_1(X,a)$ definiert dann $H(\gamma(\cdot),\cdot)$ auch eine Homotopie zwischen der Schleife

$$\begin{aligned}\sigma\colon\ [0,1] &\to A,\\ s &\mapsto H(\gamma(s),0) = \rho(\gamma(s)) \in A\end{aligned}$$

und $\gamma\colon [0,1] \to X$; diese Homotopie ist wegen $\gamma(0) = \gamma(1) = a \in A$ relativ $\{0,1\}$. Wegen $\rho \circ \sigma = \sigma$ gilt also

$$i_*\rho_*([\gamma]) = i_*\rho_*([\sigma]) = i_*([\sigma]) = [\sigma] = [\gamma],$$

also $i_* \circ \rho_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,a)}$ und somit mit Teil (a) die Behauptung.

(c) Es gibt eine Homotopie zwischen $i \circ \rho\colon X \to X$ und $\mathrm{id}_X\colon X \to X$. Es folgt, dass

$$i_* \circ \rho_* = (i \circ \rho)_*\colon \pi_1(X,a) \to \pi_1(X,(i\circ\rho)(a))$$

ein Isomorphismus ist (nach Proposition 12.2 der Vorlesung). Ausserdem ist $\rho_* \circ i_*$ die Identität auf $\pi_1(A,a)$. Nun folgt die Übung aus der folgenden Aussage, die in allen Kategorien gilt (warum?): ist für zwei Morphismen α, β die Verknüpfung $\alpha \circ \beta$ die Identität und die Verknüpfung $\beta \circ \alpha$ ein Isomorphismus, dann ist $\beta \circ \alpha$ auch die Identität.

Übung 3.

(a) Seien X und Y topologische Räume und $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Finden Sie einen (kanonischen) Gruppenisomorphismus zwischen $\pi_1(X \times Y, (x_0,y_0))$ und $\pi_1(X,x_0) \times \pi_1(Y,y_0)$.

(b) Sei $X = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in X$ beliebig. Bestimmen Sie den Isomorphietyp von $\pi_1(X,x_0)$.

Hinweis: Sie dürfen hier benutzen, dass für $n = 1$, $\pi_1(X,x_0)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist. Diese Aussage wird in der Vorlesung noch gezeigt.

Lösung für Übung 3:

(a) Wir zeigen, dass die Abbildung

$$\phi\colon \pi_1\big(X \times Y, (x_0,y_0)\big) \to \pi_1(X,x_0) \times \pi_1(Y,y_0), \quad [\gamma] \mapsto \big([\pi_X \circ \gamma], [\pi_Y \circ \gamma]\big)$$

ein Gruppenisomorphismus ist, wobei π_X und π_Y die Projektionsabbildungen auf X beziehungsweise Y bezeichnen.

Offenbar ist ϕ wohldefiniert, denn wenn $[\gamma] = [\gamma']$ gilt, so gibt es eine Homotopie H rel $\{0,1\}$ von γ nach γ'. Da die Projektionsabbildungen stetig sind, sind auch $\pi_X \circ H$ und $\pi_Y \circ H$ Homotopien rel $\{0,1\}$ von $\pi_X \circ \gamma$ nach $\pi_X \circ \gamma'$ beziehungsweise von $\pi_Y \circ \gamma$ nach $\pi_Y \circ \gamma'$. Folglich ist $([\pi_X \circ \gamma], [\pi_Y \circ \gamma]) = ([\pi_X \circ \gamma'], [\pi_Y \circ \gamma'])$.

ϕ ist ein Gruppenhomomorphismus, da

$$\begin{aligned}\phi([\gamma][\gamma']) &= \phi([\gamma\gamma']) = ([\pi_X \circ (\gamma\gamma')], [\pi_Y \circ (\gamma\gamma')])\\ &= ([(\pi_X \circ \gamma)(\pi_X \circ \gamma')], [(\pi_Y \circ \gamma)(\pi_Y \circ \gamma')])\\ &= ([\pi_X \circ \gamma][\pi_X \circ \gamma'], [\pi_Y \circ \gamma][\pi_Y \circ \gamma'])\\ &= ([\pi_X \circ \gamma], [\pi_Y \circ \gamma])([\pi_X \circ \gamma'], [\pi_Y \circ \gamma'])\\ &= \phi([\gamma])\,\phi([\gamma']).\end{aligned}$$

Weiter ist ϕ surjektiv. Denn ist $([\gamma_0],[\gamma_1]) \in \pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)$, so ist

$$\gamma(t) \coloneqq (\gamma_0(t),\gamma_1(t))$$

eine Schleife in $X\times Y$ mit $\gamma(0)=\gamma(1)=(x_0,y_0)$ und $\phi([\gamma])=([\gamma_0],[\gamma_1])$.

Es bleibt die Injektivität zu zeigen.
Seien dazu $[\gamma],[\gamma']\in\pi_1\big(X\times Y,(x_0,y_0)\big)$. Wir schreiben $\gamma(t)=(\gamma_0(t),\gamma_1(t))$ und $\gamma'(t)=(\gamma_0'(t),\gamma_1'(t))$. Dann ist $\phi([\gamma])=([\gamma_0],[\gamma_1])$ und $\phi([\gamma'])=([\gamma_0'],[\gamma_1'])$. Sei nun $\phi([\gamma])=\phi([\gamma'])$. Dann gibt es Homotopien $h_{0,t}$, $h_{1,t}$ rel $\{0,1\}$, wobei $h_{0,t}$ eine Homotopie rel $\{0,1\}$ in X von γ_0 nach γ_0' und $h_{1,t}$ eine Homotopie rel $\{0,1\}$ in Y von γ_1 nach γ_1' ist. Somit ist jedoch $H_t(s)\coloneqq(h_{0,t}(s),h_{1,t}(s))$ eine Homotpie rel $\{0,1\}$ von γ nach γ', womit $[\gamma]=[\gamma']$ gilt.

(b) Aus iterativer Anwendung von Teilaufgabe (a) folgt $\pi_1(X,x_0)\cong\mathbb{Z}^n$.

Übung 4. Sei $\mathcal{E}$ die Kategorie mit Objekten den Euklidischen Räumen $\mathbb{R}^n$ für $n\in\mathbb{N}$ und Morphismen $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ den glatten Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$, die den Ursprung auf den Ursprung senden, mit der üblichen Verknüpfung von Funktionen. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $\mathcal{F}$, die jedem $\mathbb{R}^n$ sich selbst und jedem $f\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ das Differential $Df(0)$ von f im Ursprung zuordnet, einen kovarianten Funktor von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{E}$ definiert.

Lösung für Übung 4: Sei $f\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Da die Abbildung $Df(0)\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ linear ist, ist sie auch eine glatte Abbildung. Es folgt, dass $\mathcal{F}(f)\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Das heisst, dass f wohldefiniert ist. Zeigen wir, dass $\mathcal{F}$ ein kovarianter Funktor ist. Wir müssen lediglich prüfen, dass für alle $f\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, $g\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^\ell)$ $\mathcal{F}(g\circ f)=\mathcal{F}(g)\circ\mathcal{F}(g)$ gilt. Aber

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(g\circ f)&=D(g\circ f)(0)\\&=Dg(f(0))\circ Df(0)\\&=Dg(0)\circ Df(0)\\&=\mathcal{F}(g)\circ\mathcal{F}(f).\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist die Kettenregel, und die dritte Gleichung kommt von $f(0)=0$.

Übung 5. Sei $\mathcal{U}$ gegeben durch folgendes Tripel von Daten:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ ist die Klasse der kleinen Kategorien, d.h.

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{U})=\{\mathcal{C}\mid\mathcal{C}\text{ ist eine Kategorie, für welche }\mathrm{Ob}(\mathcal{C})\text{ eine Menge ist}\},$$

- $\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ ist die Menge der kovarianten Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$,
- $\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{D})\times\mathrm{Hom}(\mathcal{D},\mathcal{E})\to\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{E})$ ist durch Nacheinanderausführen von Funktoren gegeben.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}$ eine Kategorie bildet.

Lösung für Übung 5: Sei $\mathrm{Id}_\mathcal{C}$ der Identitätsfunktor für alle Objekte $\mathcal{C}$ von $\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$. Dieser ist der Identitätsmorphismus $1_\mathcal{C}$, denn für alle $\mathcal{F}\in\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ und $\mathcal{F}'\in\mathrm{Hom}(\mathcal{D},\mathcal{C})$, haben wir

$$\mathrm{Id}_\mathcal{C}\circ\mathcal{F}'=\mathcal{F}',\quad\mathcal{F}\circ\mathrm{Id}_\mathcal{C}=\mathcal{F}.$$

Um eine Kategorie zu haben, sollen wir zeigen, dass wir für alle $(\mathcal{H},\mathcal{G},\mathcal{F})\in\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{D})\times\mathrm{Hom}(\mathcal{D},\mathcal{C})\times\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{B})$

$$\mathcal{F}\circ\mathcal{G}\in\mathrm{Hom}(\mathcal{B},\mathcal{D}),\quad\mathcal{F}\circ(\mathcal{G}\circ\mathcal{H})=(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})\circ\mathcal{H}$$

haben.

Seien $B,B',B''\in\mathrm{Ob}(\mathcal{B})$, $f\in\mathrm{Hom}(B,B')$ und $f'\in\mathrm{Hom}(B',B'')$. Wir haben die Komposition $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}(B)=\mathcal{F}(\mathcal{G}(B))\in\mathrm{Ob}(\mathcal{E})$ und

$$\mathcal{F}\circ\mathcal{G}(f)=\mathcal{F}(\mathcal{G}(f))\in\mathrm{Hom}(\mathcal{F}(\mathcal{G}(B)),\mathcal{F}(\mathcal{G}(B'))).$$

Am Ende haben wir

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}(f')) \circ \mathcal{F}(\mathcal{G}(f)) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(f') \circ \mathcal{G}(f)) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(f \circ f')) \in \mathrm{Hom}(B, B'').$$

Das heisst, dass $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ ein Funktor ist. Schliesslich muss man noch $\mathcal{F} \circ (\mathcal{G} \circ \mathcal{H}) = (\mathcal{F} \circ \mathcal{G}) \circ \mathcal{H}$ prüfen, was aber direkt folgt.

Übung 6. ($\star\star\star$) Finden Sie eine stetige Surjektion $S^1 \to S^2$. Können Sie für alle $m, n \in \mathbb{N}$ eine stetige Surjektion $S^m \to S^n$ finden?

Lösung für Übung 6: Wenn $m \geqslant n$ ist es nicht schwer, Beispiele zu finden. Wenn $m < n$ können Sie nach „space-filling curves " suchen. Es gibt eine surjektive stetige Abbildung

$$f_1 \colon [0,1] \to [0,1]^2.$$

(Nebenbemerkung: so ein f_1 ist niemals injektiv; denn dann wäre f_1 als stetige bijektive Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum ein Homöomorphismus, und wir wissen, dass $[0,1]$ und $[0,1]^2$ nicht homöomorph sind). Dann haben wir stetige surjektive Abbildungen $f_n := f_1 \times \mathrm{Id} \colon [0,1] \times [0,1]^{n-1} \to [0,1]^2 \times [0,1]^{n-1} = [0,1]^{n+1}$. Es folgt, dass es Abbildungen $f_{m,n} \colon [0,1]^m \to [0,1]^n$ gibt, die surjektiv und stetig sind. Da

$$[0,1]^n \big/ \partial [0,1]^n \cong S^n,$$

können wir nun surjektive stetige Abbildungen von S^m zu S^n konstruieren.

Serie 8

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Zeigen Sie, dass es keinen Homöomorphismus $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus S^1$ mit $f(0,0) = (2,0)$ gibt.

Lösung für Übung 1: Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus S^1$ ein Homöomorphismus. Wir wollen benutzen, dass $\mathbb{R}^2 \setminus S^1$ zwei Zusammenhangskomponenten hat. Es bezeichne A die unbeschränkte und B die beschränkte Zusammenhangskomponente (sodass B die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ ist). Weil f ein Homöomorphismus ist, werden die beiden Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus S^1$ von f entweder beibehalten oder vertauscht. Wenn $f(0,0) = (2,0)$ gilt, dann muss f die beiden Zusammenhangskomponenten A und B wegen $(0,0) \in B$ und $(2,0) \in A$ vertauschen. Insbesondere ist dann $f|_B : B \to A$ ein Homöomorphismus. Dies ist jedoch unmöglich, denn die Fundamentalgruppe von B ist trivial, während $\pi_1(A) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ ist, da S^1 ein Deformationsretrakt von A ist.

Übung 2. Seien X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$.

(a) Sei β eine Schleife an x_0. Beschreiben Sie die Abbildung

$$\psi_\beta : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0), \quad [\alpha] \mapsto [(\beta^{-1}\alpha)\beta],$$

(vgl. Proposition 12.1 aus der Vorlesung vom 11. April) mit Begriffen aus der Gruppentheorie.

(b) Sei Y ein topologischer Raum, $y_0 \in Y$ und seien $f, g\colon X \to Y$ homotope Abbildungen mit $f(x_0) = g(x_0) = y_0$. Was können Sie über $f_*, g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ aussagen?

Lösung für Übung 2:

(a) Es gilt $\psi_\beta([\alpha]) = [(\beta^{-1}\alpha)\beta)] = [\beta^{-1}][\alpha][\beta] = [\beta]^{-1}[\alpha][\beta]$, also entspricht ψ_β der Konjugation mit $[\beta]$.

(b) Die Homotopie zwischen f und g gibt uns einen Weg β von $f(x_0) = y_0$ nach $g(x_0) = y_0$, also eine Schleife an y_0, mit $f_* = \psi_\beta \circ g_*$ (Proposition 12.2 der Vorlesung, S.40). Wegen Teilaufgabe (a) gilt dann also $f_*(a) = [\beta]g_*(a)[\beta]^{-1}$ für alle $a \in \pi_1(X, x_0)$.

Übung 3. (⋆) Sei $r > 0$ eine Konstante. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung, sodass $|f(v) - v| \leqslant r$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt. Zeigen Sie, dass f surjektiv ist.

Lösung für Übung 3: Wir nehmen an, dass f nicht surjektiv ist, und betrachten die induzierte Abbildung $\bar{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, wobei ohne Einschränkung $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt sei, der unter f kein Urbild hat. Wir betrachten nun den induzierten Gruppenhomomorphismus $\bar{f}_* : \pi_1(\mathbb{R}^2, (2r,0)) \to \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, f(2r,0))$ und die Schleife

$$\begin{aligned} \alpha\colon\ & [0,1] \to \mathbb{R}^2, \\ & t \mapsto (2r\cos(2\pi t), 2r\sin(2\pi t)). \end{aligned}$$

Aus der Voraussetzung folgt, dass für alle $t \in [0,1]$ die Strecke zwischen den Punkten $f(\alpha(t))$ und

$$(|f(2r,0)|\cos(2\pi t), |f(2r,0)|\sin(2\pi t))$$

nicht durch den Ursprung verläuft. Also ist $\bar{f} \circ \alpha$ via der linearen Homotopie homotop rel $\{0,1\}$ zur Schleife an $f(2r,0)$, die den Kreis vom Radius $|f(2r,0)|$ um den Ursprung gegen den Uhrzeigersinn durchläuft. Somit gilt

$$\bar{f}_*([\alpha]) = [f \circ \alpha] \neq 0 \in \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, f(2r,0)).$$

Dies steht wegen $\pi_1(\mathbb{R}^2, (2r,0)) \cong \{1\}$ (da $\mathbb{R}^2$ kontrahierbar ist) im Widerspruch dazu, dass $\bar{f}_*$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Übung 4. Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X einfach zusammenhängend ist genau dann, wenn es für alle Paare von Punkten x, y in X eine eindeutige Homotopieklasse (rel Endpunkte) von Pfaden gibt, die diese beiden Punkte verbindet.

Lösung für Übung 4: Wir nehmen zunächst an, dass X einfach zusammenhängend ist. Seien $x, y \in X$ zwei Punkte und α, β zwei Wege von x nach y. Nach Voraussetzung gilt $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y) \cong \{1\}$ und daher $\beta^{-1}\beta \simeq \mathrm{const}_y$ rel $\{0,1\}$ und $\alpha\beta^{-1} \simeq \mathrm{const}_x$ rel $\{0,1\}$. Daraus folgt

$$\alpha \simeq \alpha\,\mathrm{const}_y \simeq \alpha(\beta^{-1}\beta) \simeq (\alpha\beta^{-1})\beta \simeq \mathrm{const}_x\,\beta \simeq \beta$$

rel Endpunkte. Da α und β beliebig waren, gibt es also eine eindeutige Homotopieklasse von Pfaden von x nach y.

Umgekehrt nehmen wir an, dass es für alle $x, y \in X$ eine eindeutige Homotopieklasse (rel Endpunkte) von Pfaden gibt, die diese beiden Punkte verbindet. Sei $x \in X$. Dann gibt es eine eindeutige Homotopieklasse von Pfaden von x nach x. Also sind alle Schleifen an x homotop rel Endpunkte und es gilt $\pi_1(X, x) = \{1\}$.

Übung 5. $(\star)$ Sei $(G, \cdot)$ eine topologische Gruppe mit neutralem Element e. Zeigen Sie, dass $\pi_1(G, e)$ kommutativ ist[1].

Lösung für Übung 5: Seien $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(G, e)$ und bezeichne $\bullet\colon G \times G \to G$ die Multiplikation der Gruppe. Wir schreiben auch $\bullet$ für die punktweise Multiplikation von Wegen. Diese erhält Stetigkeit. Dann gilt

$$(\alpha\,\mathrm{const}_e) \bullet (\mathrm{const}_e\,\beta) = (\alpha \bullet \mathrm{const}_e)(\mathrm{const}_e \bullet \beta) = \alpha\beta$$

und $(\alpha\,\mathrm{const}_e) \bullet (\mathrm{const}_e\,\beta) \simeq_{\{0,1\}} \alpha \bullet \beta$. Andererseits gilt auch

$$\alpha \bullet \beta \simeq_{\{0,1\}} (\mathrm{const}_e\,\alpha) \bullet (\beta\,\mathrm{const}_e) = \beta\alpha,$$

also folgt $\alpha\beta \simeq \alpha \bullet \beta \simeq \beta\alpha$ und damit die Behauptung.

Übung 6. Sei X ein kontrahierbarer topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X einfach zusammenhängend ist. Dies folgt direkt aus der Invarianz der Fundamentalgruppe unter Homotopieäquivalenzen, kann aber in diesem Spezialfall auch direkt gezeigt werden.

Lösung für Übung 6: Wir zeigen zuerst, dass X wegzusammenhängend ist.

Lemma 1. *Sei X ein kontrahierbarer topologischer Raum, dann ist X wegzusammenhängend.*

Beweis. Da X kontrahierbar ist, finden wir $H\colon X \times [0,1] \to X$ eine Homotopie zwischen id_X und der konstanten Abbildung, d.h. $H(x,0) = x$ und $H(x,1) = x_0$ für alle $x \in X$, und einem beliebigen Punkt $x_0 \in X$. Sind also $y, z \in X$ gegeben, so gibt es einen Weg von y nach z, nämlich $\gamma\colon [0,1] \to X$,

$$\gamma(s) \coloneqq \begin{cases} H(y, 2s) & \text{falls } s \in [0, 1/2] \\ H(z, 2-2s) & \text{falls } s \in [1/2, 1]\,. \end{cases}$$

□

Wir zeigen jetzt, dass $\pi_1(X, x_0) \cong \{1\}$. Sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ eine Schleife an x_0, d.h. $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Die Abbildung $F\colon [0,1] \times [0,1] \to X$,

$$F(s,t) \coloneqq H(\gamma(s), t),$$

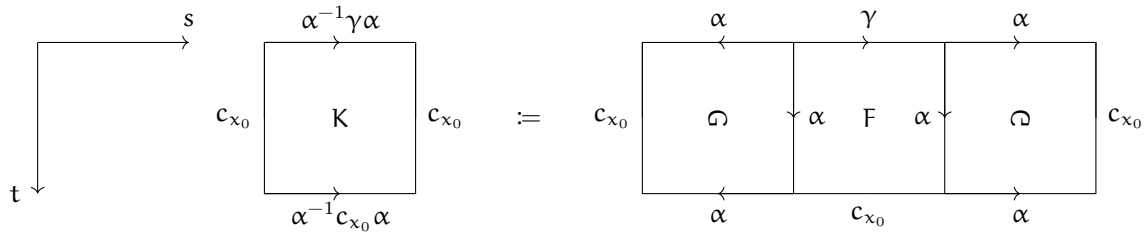
erfüllt $F(s,0) = \gamma(s)$, $F(s,1) = x_0$.

Wir bemerken, dass die Abbildung $\alpha\colon [0,1] \to X$, die als $\alpha(t) \coloneqq F(0,t) = H(x_0, t)$ definiert ist, ein Weg mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ ist. Insbesondere definiert α ein Element von $\pi_1(X, x_0)$.

Wir denken über die Homotopie $G\colon [0,1]\times[0,1] \to X$, $G(s,t) \coloneqq H(\alpha(s), t)$ nach und wir definieren die Abbildung $K\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ als (siehe Abbildung unten, wir schreiben c_{x_0} für const_{x_0})

$$K(s,t) = \begin{cases} G(t, 1-3s) & \text{falls } s \in [0, 1/3] \\ F(3s-1, t) & \text{falls } s \in [1/3, 2/3] \\ G(t, 3s-2) & \text{falls } s \in [2/3, 1]\,. \end{cases}$$

[1] Schreiben Sie die Verkettung $\alpha\beta$ zweier Schleifen α, β als die punktweise Multiplikation (=Gruppenoperation) zweier gut gewählter Schleifen.



Man kann zeigen, dass K stetig ist, dass $K(\cdot,0) = \alpha^{-1}\gamma\alpha$, $K(\cdot,1) = \alpha^{-1}c_{x_0}\alpha$ und dass $K(0,t) = K(1,t) = x_0$ für alle $t \in [0,1]$. (Hier schreiben wir $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ für die Verkettung der drei Wege σ_i, mit einem Drittel des Intervalls für jeden Weg; dies ist homotop rel Endpunkte zu $(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3$ und $\sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$). Die Abbildung K ist eine Homotopie zwischen $\alpha^{-1}\gamma\alpha$ und $\alpha^{-1}c_{x_0}\alpha$. Es folgt, dass

$$[\alpha^{-1}\gamma\alpha] = [\alpha^{-1}c_{x_0}\alpha] \implies [\gamma] = [\alpha][\alpha^{-1}c_{x_0}\alpha][\alpha^{-1}] = [c_{x_0}]$$

Das heisst $\pi_1(X,x_0) = \{[c_{x_0}]\} = \{1\}$.

Übung 7. Ein **Gruppoid** ist eine kleine Kategorie, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist. (Zur Erinnerung: eine Kategorie ist *klein*, wenn ihre Objekte eine Menge bilden, vgl. Serie 7, Übung 5).

(a) Prüfen Sie, dass für alle Gruppoide G und alle Objekte $X \in \mathrm{Ob}(G)$ die Morphismenmenge $G(X,X)$ eine Gruppe bildet. Finden Sie eine 1:1 Korrespondenz zwischen Gruppen und Gruppoiden mit nur einem Objekt.

(b) Seien G ein Gruppoid und $X, Y \in \mathrm{Ob}(G)$, so dass ein $f \in G(X,Y)$ existiert. Zeigen Sie, dass $G(X,X)$ und $G(Y,Y)$ isomorphe Gruppen sind.

(c) Sei X ein topologischer Raum. Wir definieren die Kategorie $\Pi_1(X)$, die als Objekte genau die Punkte in X hat (also $\mathrm{Ob}(\Pi_1(X)) = X$), und als Morphismenmenge $\Pi_1(x_0,x_1)$ die Wege von x_0 nach x_1 bis auf Homotopie rel Endpunkte. Zeigen Sie, dass $\Pi_1(X)$ ein Gruppoid ist (das sogenannte *Fundamentalgruppoid*).

(d) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}\Pi_1 : \mathbf{Top} &\to \text{Kategorie der Gruppoide}\\ X &\mapsto \Pi_1(X).\end{aligned}$$

ein Funktor ist. (Die Kategorie der Gruppoide ist ähnlich wie in Serie 7, Übung 5 definiert).

(e) Wie können Sie $\pi_1(X,x_0)$ mit Hilfe von $\Pi_1(X)$ beschreiben?

Lösung für Übung 7:

(a) Wir wollen zeigen, dass $(G(X,X),\circ)$ eine Gruppe ist. Der Morphismus $1_X \in G(X,X)$ ist das neutrale Element. Die Definition von Kategorie impliziert auch, dass die Komposition $\circ$ assoziativ ist. Und für alle $f \in G(X,X)$, gibt es Inverse $f^{-1} \in G(X,X)$, da f eine Isomorphismus ist.

Die gesuchte 1:1 Korrespondenz schickt nun ein Gruppoid G mit nur einem Objekt X auf die Gruppe $G(X,X)$, und umgekehrt eine Gruppe H auf das Gruppoid mit einem Objekt X, und Morphismenmenge von X nach X gegeben durch H.

(b) Man sieht, dass

$$\begin{aligned}C_f \colon G(X,X) &\to G(Y,Y)\\ g &\to fgf^{-1}\end{aligned}$$

eine Isomorphismus zwischen beiden Gruppen ist. Sein Inverses ist $C_{f^{-1}}$.

(c) Sei $([\gamma],[\gamma']) \in \Pi_1(X)(x_0,x_1) \times \Pi_1(X)(x_1,x_2)$. Die Komposition der Homotopieklasse der Wege γ und γ' ist die Homotopielasse $[\gamma]\circ[\gamma'] = [\gamma\gamma'] \in \Pi_1(X)(x_0,x_2)$. Es wurde in der Vorlesung bewiesen, dass $\circ$ assoziativ ist. Die Homotopieklassen der konstanten Wege fungieren als 1-Morphismen. Das heisst, dass $\Pi_1(X)$ eine Kategorie ist. Ausserdem gilt für alle Wege γ von x_0 nach x_1, dass $[\gamma]\circ[\gamma^{-1}] = [\gamma\gamma^{-1}] = [\mathrm{const}_{x_0}]$. Es folgt, dass $[\gamma] \in \Pi_1(X)(x_0,x_1)$ ein Isomorphismus ist.

(d) Wir müssen noch Π_1 für Abbildungen definieren. Seien $X, Y \in \mathbf{Top}$ zwei topologische Räume und $f\colon X \to Y$ ein Morphismus $f \in \mathbf{Top}(X,Y)$, d.h eine stetige Abbildung von X nach Y. Nun sei $\Pi_1(f)$ der Funktor

$$\begin{aligned}\Pi_1(f)\colon \Pi_1(X) &\to \Pi_1(Y)\\ x_0 &\mapsto f(x_0)\\ [\gamma] \in \Pi_1(X)(x_0,x_1) &\mapsto [f\circ\gamma] \in \Pi_1(Y)(f(x_0),f(x_1)).\end{aligned}$$

Man prüft zuerst, dass $\Pi_1(f)$ tatsächlich ein Funktor zwischen den Gruppoiden $\Pi_1(X)$ und $\Pi_1(Y)$ ist, also dass $\Pi_1(f)([\mathrm{const}_{x_0}]) = [\mathrm{const}_{f(x_0)}]$ und $\Pi_1(f)([\gamma]\circ[\gamma']) = \Pi_1(f)([\gamma])\circ\Pi_1(f)([\gamma'])$. Danach prüft man, dass Π_1 tatsächlich ein Funktor von **Top** nach der Kategorie der Gruppoide ist, also dass $\Pi_1(\mathrm{id}_X)$ der Identitätsfunktor von $\Pi_1(X)$ ist, und $\Pi_1(f\circ g) = \Pi_1(f)\circ\Pi_1(g)$. All diese Eigenschaften folgen direkt aus den Definitionen.

(e) Es ist direkt zu sehen, dass $\pi_1(X,x_0) \cong \Pi_1(X)(x_0,x_0)$.

Rätsel: Gegeben sei ein Bilderrahmen und ein Faden, der an seinen Enden am Bilderrahmen befestigt ist. In der Wand seien zwei Nägel eingeschlagen. Können Sie den Bilderrahmen so an den zwei Nägeln aufhängen, dass er sicher herunterfällt, sobald Sie einen der beiden Nägel aus der Wand ziehen?
Lösung für Übung 8: Hinweis: Seien a und b die beiden Erzeuger von $\pi_1(X,(0,0))$ für $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$. Studieren Sie $aba^{-1}b^{-1}$.

Serie 9

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. (⋆) In Serie 8, Übung 2 haben wir gesehen, dass für X, Y zwei topologische Räume, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ und $f, g\colon X \to Y$ zwei homotope Abbildungen mit $f(x_0) = g(x_0) = y_0$ ein Weg β mit $f_* = \psi_\beta \circ g_*$ existiert. Finden Sie Abbildungen f, g wie in Serie 8, Übung 2 (b), sodass $f_* \neq g_*$ gilt[1].

Lösung für Übung 1: Seien $X = S^1$ und $Y = S^1 \vee S^1$. Wir beschreiben Elemente in S^1 durch reelle Zahlen θ, mit denen $e^{2\pi i\theta} \in S^1$ gemeint ist. In Y beschreiben wir Elemente mit einem Paar (θ, i) für $\theta \in S^1$ und $i = 0, 1$. Die Punkte $(0, 0) = 0$ und $(0, 1)$ sind identifiziert in Y. Seien

$$\begin{aligned} f\colon S^1 &\to S^1 \vee S^1 \\ \theta &\mapsto (\theta, 0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g\colon S^1 &\to S^1 \vee S^1 \\ \theta &\mapsto \begin{cases} (-3\theta, 1) & \text{wenn } 0 \leqslant \theta \leqslant 1/3, \\ (3\theta, 0) & \text{wenn } 1/3 \leqslant \theta \leqslant 2/3, \\ (3\theta, 1) & \text{wenn } 2/3 \leqslant \theta \leqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Man kann mit Hilfe des Verklebungslemmas zeigen, dass g stetig ist. Wir wissen auch, dass

$$\pi_1(S^1 \vee S^1, (0,0) = (0,1)) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

von den Wegen $\alpha\colon \theta \mapsto (\theta, 0)$ und $\beta\colon \theta \mapsto (\theta, 1)$ erzeugt ist. Man bemerkt, dass $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ nicht kommutativ ist! Sei $\gamma\colon \theta \mapsto \theta$ ein Erzeuger der Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1, 0)$. Es ist klar, dass

$$f_*\colon [\gamma] \mapsto [\alpha], \quad g_*\colon [\gamma] \mapsto [(\beta^{-1}\alpha)\beta].$$

Das heisst, dass $f_* \neq g_*$. Wir haben jedoch eine Homotopie zwischen f und g:

$$\begin{aligned} H\colon S^1 \times [0,1] &\to S^1 \vee S^1 \\ (\theta, t) &\mapsto \begin{cases} (-3\theta - t, 1) & \text{wenn } 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1-t}{3}, \\ \left(\dfrac{3\theta - 1 + t}{1 + 2t}, 0\right) & \text{wenn } \frac{1-t}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{2+t}{3}, \\ (3\theta - t, 1) & \text{wenn } \frac{2+t}{3} \leqslant \theta \leqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $[0,1] \to S^1 \vee S^1, t \mapsto H(0,t) = (-t, 1)$ die Schleife $[\beta^{-1}]$ ist.

Übung 2. Seien H und K Gruppen.

(a) Zeigen Sie: Falls alle Elemente von $H \setminus \{1\}$ und $K \setminus \{1\}$ unendliche Ordnung haben, dann haben auch alle Elemente von $(H * K) \setminus \{1\}$ unendliche Ordnung. Schliessen Sie daraus, dass $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ nicht isomorph zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ ist.

(b) Gibt es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von $H * K$ nach $H \times K$?

Lösung für Übung 2:

[1] Die Homotopie H zwischen f und g muss y_0 bewegen.

(a) Wir betrachten ein reduziertes Wort w in $H * K$ und nehmen an, dass es endliche Ordnung n hat. Wenn w gerade Länge hat, dann muss w^n ebenfalls reduziert sein, und kann darum nur das triviale Wort sein, wenn w trivial war. Wenn w ungerade Länge hat, dann können wir Potenzen von w reduzieren und Induktion zeigt, dass w^n von der Form a^n sein muss für ein a in H oder K. So ein Element ist allerdings nur trivial, falls a und somit w trivial war.

(b) Die Inklusionen $H \to H \times K$ und $K \to H \times K$ induzieren einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon H * K \to H \times K$ mit $\varphi(h) = (h, 1)$ und $\varphi(k) = (1, k)$ für alle $h \in H, k \in K$ (wegen der universellen Eigenschaft des freien Produkts $H * K$). Es gilt somit $\varphi(h * k) = (h, 1) \cdot (1, k) = (h, k)$ für alle $h \in H, k \in K$ und φ ist somit surjektiv.

Übung 3. Sei $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ wie in der Vorlesung die freie Gruppe mit Erzeugern $a_1, \dots, a_n$, d.h. das freie Produkt von n Kopien von $\mathbb{Z}$, wobei a_i die 1 in der i-ten Kopie bezeichnet. Sind $r_1, \dots, r_k \in G$, so schreiben wir

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$$

für die Faktorgruppe G/N, wobei N der Normalteiler von G ist, der von allen Konjugierten der $r_1, \dots, r_k$ erzeugt ist. Zeigen Sie, dass die folgenden Gruppen jeweils isomorph sind.

(a) $\langle x, y \mid x^6, x^{15}, xyx^{-1}y^{-1} \rangle \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}$.

(b) $\langle x, y \mid x^2, y^3 \rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

(c) $\langle x, y \mid x^2y^3, x^3y^4 \rangle \cong \{1\}$.

(d) $\langle x, y \mid x^2y^{-3} \rangle \cong \langle a, b \mid abab^{-1}a^{-1}b^{-1} \rangle$.

Lösung für Übung 3: Der Einfachheit halber bezeichnen wir im folgenden mit x nicht nur das Element der freien Gruppe G, sondern auch die Nebenklasse $[x]$ in der Faktorgruppe G/N.

(a) Da $xyx^{-1}y^{-1} = 1$, wissen wir, dass $xy = yx$ in G/N. Es handelt sich also um eine abelsche Gruppe. Wir haben ausserdem, dass $\langle x^6, x^{15} \rangle = \langle x^3 \rangle$, weil $x^3 = x^{15}x^{-6}x^{-6}$ und $x^6 = x^3x^3$, $x^{15} = (x^3)^5$. Die Gruppe G/N ist dann

$$\mathbb{Z}^2/(x^3 = 0) \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}.$$

(b) Bezeichne einen jeweiligen Erzeuger von $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ und $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ mit a und b. Um einen Gruppenhomomorphismus $f\colon G/N \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ zu definieren, genügt es, die Bilder von x und y festzulegen, sodas x^2 und y^3 auf 1 geschickt werden. Definieren wir also f durch $f(x) = a, f(y) = b$. Umgekehrt kann man (dank der universalen Eigenschaften des freien Produktes) $g\colon (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \to G/N$ durch Abbildungen $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to G/N$ und $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \to G/N$ festlegen. Wählen wir also $g(a) = x, g(b) = y$. Dann sind f und g zueinander inverse Gruppenhomomorphismen.

(c) Wir haben, $x = x^3x^{-2} = y^{-4}y^3 = y$, also $1 = x^2y^3 = x^5$ und $1 = x^3y^4 = x^7$. Da $x = (x^7)^3(x^5)^{-4} = 1$, folgt $x = 1 = y$. Also ist G/N trivial.

(d) Seien $G_1/N_1 \coloneqq \langle x, y \mid x^2y^{-3} \rangle$ und $G_2/N_2 \coloneqq \langle a, b \mid abab^{-1}a^{-1}b^{-1} \rangle$. Ähnlich wie in (b) definieren wir jetzt zueinander inverse Gruppenhomomorphismen $\varphi_1\colon G_1/N_1 \to G_2/N_2$ und $\varphi_2\colon G_2/N_2 \to G_1/N_1$. Um φ_1 zu definieren, genügt es, die Bilder von x und y festzulegen; dies muss so geschehen, dass x^2y^{-3} auf 1 geschickt wird. Wir definieren

$$\varphi_1\colon \langle x, y \rangle \to G_2, x \mapsto bab, y \mapsto ab.$$

Wir haben wie benötigt $\varphi_1(x^2) = babbab = abab^{-1}a^{-1}b^{-1}babbab = ababab = \varphi_1(y^3)$. Wir definieren jetzt

$$\varphi_2\colon \langle a, b \rangle \mapsto G_1, b \mapsto xy^{-1}, a \mapsto y^2x^{-1}$$

Wiederum haben wir wie benötigt $\varphi_2(abab^{-1}a^{-1}b^{-1}) = y^2x^{-1}xy^{-1}y^2x^{-1}yx^{-1}xy^{-2}yx^{-1} = y^3x^{-2} = 1$. Es ist klar, dass φ_1 und φ_2 invers zueinander sind.

Übung 4. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe des projektiven Raums $\mathbb{RP}^2$ (vgl. Übung 4 von Serie 4).

Lösung für Übung 4: Wir verwenden die Definition $\mathbb{RP}^2 = D^2/\sim$, wobei $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leqslant 1\}$ und $\sim$ erzeugt ist von $x \sim -x$ für alle $x \in D^2$ mit $\|x\| = 1$. Nun sind

$$U = \{[x] \mid x \in D^2, \|x\| < 2/3\},$$
$$V = \{[x] \mid x \in D^2, \|x\| > 1/3\}$$

und $U \cap V$ offen und wegzusammenhängend. Wähle $x_0 = [(1/2, 0)] \in U \cap V$. Da $U \cong B(0,1)$ zusammenziehbar ist, ist $\pi_1(U, x_0)$ trivial. Der Raum V hat als Deformationsretrakt $\{[x] \mid x \in D^2, \|x\| = 1\}$. Dieser Raum ist $S^1/\sim$ mit $\sim$ erzeugt von $x \sim -x$. Er ist zu S^1 homöomorph via $S^1/\sim \to S^1, [z] \mapsto z^2$. Somit ist $\pi_1(V, x_0) \cong \mathbb{Z}$, erzeugt von der Klasse der Schleife $\sigma_V \colon s \mapsto [e^{\pi i s}/2]$ (Achtung: nicht $e^{2\pi i s}$!). Auch $U \cap V$ hat als Deformationsretrakt $\{[x] \mid x \in D^2, \|x\| = 1/2\} \cong S^1$. Also ist $\pi_1(U \cap V, x_0) \cong \mathbb{Z}$ erzeugt von der Klasse der Schleife $\sigma_{U\cap V} \colon s \mapsto [e^{2\pi i s}/2]$. Nach dem Satz von Seifert–van Kampen ist $\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0)$ isomorph zu $\pi_1(V, x_0)/N$, wobei N erzeugt ist von Konjugierten von $\kappa_*^U([\sigma])\kappa_*^V([\sigma^{-1}])$. Da $\pi_1(V, x_0) \cong \mathbb{Z}$ abelsch ist, spielen die Konjugierten keine Rolle. Es genügt, den Erzeuger $[\sigma_{U\cap V}]$ zu betrachten. Wir haben $\kappa_*^U([\sigma_{U\cap V}]) = 1$ (da $\pi_1(U, x_0)$ trivial) und $\kappa_*^V([\sigma_{U\cap V}]) = 2[\sigma_V]$, nach der expliziten Beschreibung von $\sigma_{U\cap V}$ und σ_V. Unter dem Isomorphismus $\pi_1(V, x_0) \to \mathbb{Z}$ geht also N auf $2\mathbb{Z}$. Wir erhalten als Ergebnis $\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Man erhält dieses Ergebnis auch als Spezialfall von Übung 6 (a), da $\mathbb{RP}^2$ aus S^1 durch Anheften einer 2-Zelle mit Verklebeabbildung $S^1 \to S^1, z \mapsto z^2$ entsteht.

Übung 5. (Fundamentalgruppe von Graphen.) $(\star)$ Sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph. Das heisst, dass V eine endliche Menge ist (die Menge der sogenannten Ecken) und $E \subseteq V \times V$ (die Menge der sogenannten Kanten). Wir ordnen G folgenden topologischen Raum X zu: versehe V und E mit der diskreten Topologie, und setze $X = (V + (E \times [0,1]))/\sim$, wobei $\sim$ erzeugt ist durch $v_i \sim ((v_0, v_1), i)$ für alle $(v_0, v_1) \in E$ und $i \in \{0, 1\}$. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von X.

Lösung für Übung 5: Es ist am einfachsten, auch Multigraphen zu erlauben, d.h. Graphen mit mehreren Kanten zwischen den gleichen Endpunkten. Formal kann man dies umsetzen, indem man als E eine Multimenge zulässt.

Sei $x_0 \in X$ und $C \subset X$ die Wegzusammenhangskomponente von x_0. Dann $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(C, x_0)$. Also betrachten wir nur den Fall, dass X wegzusammenhängend ist. Das ist dazu äquivalent, dass G zusammenhängend im Sinne der Graphentheorie ist.

Falls G nur eine einzige Ecke hat, so ist X homöomorph zum Wedge von $|E|$ Kreisen, und also ist dann $\pi_1(X, x_0)$ eine freie Gruppe mit $|E|$ Erzeugern. Falls G mehr als eine Ecke hat, so gibt es (da G zusammehängend ist) eine Kante (v, v') mit zwei verschiedenen Endpunkten $v \neq v'$. Betrachte den Graph G', bei dem diese beiden Endpunkte identifiert, und die Kante entfernt. Man sieht, dass der Raum X' dieses Graphen homotopieäquivalent zu X ist (X' entsteht durch das Zusammenschlagen der Kante zu einem Punkt), also eine isomorphe Fundamentalgruppe hat. Der Graph G' hat eine Ecke und eine Kante mehr als G. Also folgt per Induktion, dass $\pi_1(X, x_0)$ eine freie Gruppe mit $|E| - |V| + 1$ Erzeugern ist.

Als alternative Lösung wählt man einen maximalen Baum B in G. Nun prüft man, dass durch das Zusammenschlagen von B in X zu einem Punkt ein homotopieäquivalenter Raum X' entsteht (das ist ähnlich, aber etwas komplizierter als die Homotopieäquivalenz in der ersten Lösung). Da G wegzusammenhängend ist, enthält B alle Ecken von G und B enthält $|V| - 1$ Kanten. Der Raum X' ist dann homöomorph zum Wedge-Produkt von $|E| - |V| + 1$ Kreisen. Das Resultat folgt.

Schliesslich ist auch eine Lösung direkt mit Hilfe des Satzes von Seifert–van Kampen möglich, indem man zeigt, dass das Hinzufügen einer Kante an bereits bestehende Ecken in der gleichen Wegzusammenhangskomponente die Fundamentalgruppe durch ein freies Produkt mit $\mathbb{Z}$ ändert.

Übung 6. $(\star)$ Sei X ein topologischer Raum, $k \geqslant 1$, und $\varphi \colon S^{k-1} \to X$ stetig. Wir sagen, $X \cup_\varphi D^k$ entsteht aus X durch *Anheften einer k-Zelle*. Hier ist $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \leqslant 1\}$. (Siehe Kap. 8, S. 23 in den Aufschriften für die Definition einer Anheftung $\cup_\varphi$).

(a) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von $X \cup_\varphi D^k$ für $k = 2$.

(b) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von $X \cup_\varphi D^k$ für $k \geqslant 3$.

(c) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Konstruieren Sie einen topologischen Raum X mit

$$\pi_1(X, x_0) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Lösung für Übung 6:

(a) Sei $\varphi\colon S^1 \to X$ eine stetige Funktion. Wir benutzen den Satz von Seifert und van Kampen. Wir zerlegen die 2-Zelle D^2 wie $D^2 = \widehat{D} \cup A$ mit

$$\widehat{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 2/3\} \text{ und } A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \in (1/3, 1]\}.$$

Sei nun

$$B = D \cap A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \in (1/3, 2/3)\}.$$

Wir können jetzt $X \cup_\varphi D^2$ als $(X \cup_\varphi A) \cup \widehat{D}$ schreiben. Seien $U = X \cup_\varphi A$, $V = \widehat{D}$ und $x_0 \in B$. Dann $U \cap V = B$ und wir erhalten das folgende kommutative Diagramm von Fundamentalgruppen im Satz von Seifert–van Kampen:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(B, x_0) & \xrightarrow{\kappa_*^V} & \pi_1(\widehat{D}, x_0) \\ {\scriptstyle \kappa_*^U}\downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X \cup_\varphi A, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X \cup_\varphi D^2, x_0) \end{array}$$

Zuerst ist es klar, dass $\pi_1(\widehat{D}, x_0) \cong 1$. Also ist $\kappa_*^V\colon \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(\widehat{D}, x_0)$ die Nullabbildung. Wir sehen, dass B als Deformationsretrakt S^1 hat. Also ist $\pi_1(B, x_0) \cong \mathbb{Z}$ von $\gamma\colon s \mapsto e^{is}/2$ erzeugt. Wir haben auch den Isomorphismus $i_*\colon \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$, der von der Inklusion $i\colon B \hookrightarrow A$ induziert ist. Die Homotopie

$$\begin{aligned} F\colon A \times [0,1] &\to A \\ (x, t) &\mapsto x \cdot \|x\|^{-t} \end{aligned}$$

zeigt, dass A als Deformationsretrakt S^1 hat. Aus dem Verklebungslemma deduzieren wir einen Deformationsretrakt $\mathrm{Id} \cup_\varphi F\colon X \cup_\varphi A \times [0,1] \to X \cup_\varphi A$ von $X \cup_\varphi A$ zu X. Sei $\rho(\cdot) = F(\cdot, 1)$. Die Abbildungen

$$r_*\colon \pi_1(X \cup_\varphi A, x_0) \to \pi_1(X, x_0) \text{ und } i_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X \cup_\varphi A, x_0)$$

sind invers zueinander (vgl. Serie 7, Übung 2 (b)). Doch gibt es $i_*\colon \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X \cup_\varphi A, x_0), [\gamma] \mapsto [\varphi]$ mit $[\varphi]$ die Klasse, die von φ erzeugt ist (legen wir x_0 auf $\varphi(1)$ und betrachten den Weg $s \mapsto \varphi(e^{2\pi i s})$). Unser kommutatives Diagramm hat also die Form

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(B, x_0) \cong \langle[\gamma]\rangle & \xrightarrow{\kappa_* \cong 1} & \pi_1(\widehat{D}, x_0) \cong 1 \\ {\scriptstyle \kappa_*}\downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X \cup_\varphi A, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X \cup_\varphi D^2, x_0) \end{array}$$

Da $i_*\colon B \to \widehat{D}, [\gamma] \mapsto 0$, gilt

$$\pi_1(X \cup_\varphi D^2, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)/N,$$

wobei N aus allen Konjugierten von $[\varphi]$ besteht.

Bemerkung 1. *Eine 2-Zelle anzukleben, tötet $\varphi\colon S^1 \to X$ in der Fundamentalgruppe. Genauer gesagt: φ bestimmt eine Konjugationsklasse in $\pi_1(X, x_0)$, die aus allen Elementen der Form $[\tau\sigma\tau^{-1}]$ besteht, wobei τ ein beliebiger Weg von x_0 nach $\varphi(1)$ ist, und σ der Weg $s \mapsto \varphi(e^{2\pi i s})$. Durch das Ankleben der 2-Zelle wird diese Konjugationsklasse herausgeteilt.*

(b) Sei $\varphi\colon S^{k-1} \to X$ eine stetige Funktion. Wir zerlegen wie in (a) die k-Zelle D^k wie $D^k = \widehat{D} \cup A$ mit

$$\widehat{D} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| < 2/3\} \text{ und } A = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \in (1/3, 1]\}$$

und definieren wieder

$$B = D \cap A = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \in (1/3, 2/3)\}.$$

Wir können jetzt $X \cup_\varphi D^k$ als $(X \cup_\varphi A) \cup \widehat{D}$ schreiben. Seien $U = X \cup_\varphi A$, $V = \widehat{D}$ und $x_0 \in B$. Dann $U \cap V = B$. Mann sehen, dass die Fundamentalgruppe von $\widehat{D}$, B und A trivial sind, weil diese topologische Räume jeweils einen Punkt, S^{k-1} und S^{k-1} als Deformationsretrakt haben. Das kommutative Diagramm von Fundamentalgruppen im Satz von Seifert–van Kampen ist also

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(B, x_0) \cong 1 & \xrightarrow{\kappa_*} & \pi_1(\widehat{D}, x_0) \cong 1 \\ {\scriptstyle \kappa_*}\downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X \cup_\varphi A, x_0) & \xrightarrow{\iota_*^V} & \pi_1(X \cup_\varphi D^k, x_0) \end{array}$$

Es folgt, dass $\iota_*^V\colon \pi_1(X \cup_\varphi A, x_0) \to \pi_1(X \cup_\varphi D^k, x_0)$ ein Isomorphismus ist. Da $X \cup_\varphi A$ auf X deformationsretrahiert, folgt $\pi_1(X \cup_\varphi D^k, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$.

Bemerkung 2. *Eine k-Zelle mit $k \geqslant 3$ ankleben, ändert die Fundamentalgruppe nicht.*

(c) Sei $X = S^1$, dann $\pi_1(X, 1) \cong \mathbb{Z} = \langle[\gamma]\rangle$ mit $\gamma\colon S^1 \to S^1, z \mapsto z$. Sei $\varphi\colon S^1 \to S^1, z \mapsto z^n$. Wir haben, dass $[\varphi] = n[\gamma]$. Aus (a) haben wir

$$\pi_1(X \cup_\varphi D^2) \cong {}^{\pi_1(X)}\!/_{\langle[\varphi]\rangle} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Wir finden auf diese Weise zwei topologische Räume Y und Z mit jeweiligen Fundamentalgruppen $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Das Wedge-Produkt $Y \vee Z$ von Y und Z hat Fundamentalgruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Serie 10

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

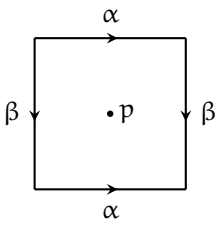
Übung 1. Benutzen Sie den Satz von Seifert und van Kampen, um die folgenden Fundamentalgruppen zu bestimmen:

(a) $\pi_1(T^2, x_0)$, wobei T^2 den Torus bezeichnet,

(b) $\pi_1(K, x_0)$, wobei K die Kleinsche Flasche bezeichnet.

Lösung für Übung 1:

(a) We first determine the fundamental group of $T^2 \setminus \{p\}$ for any point $p \in T^2$. Let us represent the torus T^2 as a square with opposite sides identified, that is $Q/\sim$, where $Q \coloneqq [-1,1] \times [-1,1]$ and $(x,-1) \sim (x,1)$ for $x \in [-1,1]$, $(-1,y) \sim (1,y)$ for $y \in [-1,1]$ (see Figure (a)).



Moreover, we can assume that $p = (0,0)$ is the center of the square. Observe that $Q \setminus \{p\}$ deformation retracts on the boundary of the square ∂Q, via the "linear" homotopy

$$H((x,y),t) = (1-t)(x,y) + tb(x,y),$$

where $b(x,y) \in \partial Q$ is the unique intersection of ∂Q with the ray starting from p and going through (x,y). As a result, the fundamental group of $(Q/\sim) \setminus \{p\}$ is the same as the fundamental group of $\partial Q/\sim$. However, observe that $\partial Q/\sim$ is homeomorphic to the wedge sum of two circles, hence we obtain that

$$\pi_1\left(T^2 \setminus \{p\}, x_0\right) = \pi_1\left(\partial Q/\sim, x_0\right) = \pi_1\left(S^1 \vee S^1\right) = \pi_1\left(S^1\right) * \pi_1\left(S^1\right) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

by the Seifert–van Kampen Theorem.

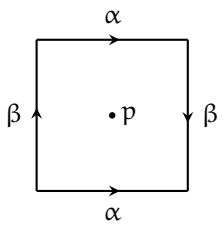
Now, let us use this to determine $\pi_1\left(T^2\right)$. To that end, consider the open cover of T^2 consisting of the open sets $A = (Q/\sim) \setminus \{(0,0)\} \subseteq Q/\sim$ and $B = \operatorname{int}(Q) = (-1,1) \times (-1,1) \subseteq Q/\sim$. By the above discussion, the fundamental group of A is $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, whose generators are $a = [\alpha]$ and $b = [\beta]$, where $\alpha, \beta \colon [0,1] \to A$ are the curves $\alpha(t) \coloneqq (-1+2t,-1) = (-1+2t,1)$ and $\beta(t) \coloneqq (-1,1-2t) = (1,1-2t)$ (see the above figure). On the other hand, B is contractible and thus has trivial fundamental group. Moreover note that $A \cap B = ((-1,1) \times (-1,1)) \setminus \{(0,0)\}$ is homotopy equivalent to S^1, hence it has fundamental group $\mathbb{Z}$ and a generator for $\pi_1(A \cap B)$ is the equivalence class of a curve homotopic to $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ (i.e. a curve winding clockwise once around the origin).

As a result, by the Seifert–van Kampen Theorem, we have that

$$\pi_1\left(T^2, x_0\right) = (\pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0))/N = \pi_1(A,x_0)/N = (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})/N,$$

where N is the normal subgroup of $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ generated by $aba^{-1}b^{-1}$. Now, observing that $(\mathbb{Z} * \mathbb{Z})/N$ is isomorphic to $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, we conclude that $\pi_1\left(T^2, x_0\right) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(b) Similarly to what we did in the proof of the previous exercise (in fact the whole argument will be very similar), let us represent the Klein bottle K as a quotient of the square, that is $Q/\sim$, where $Q \coloneqq [-1,1] \times [-1,1]$ and $(x,-1) \sim (x,1)$ for $x \in [-1,1]$, $(-1,y) \sim (1,-y)$ for $y \in [-1,1]$ (see the figure below). Note that, differently from the torus, here the vertical sides are identified with opposite orientation.



Again, we first determine the fundamental group of $K \setminus \{p\}$, where p is any point $p \in K$. We can assume that $p = (0,0)$ is the center of the square. Then, exactly the same homotopy as in part (a) shows that $(Q/\sim) \setminus \{p\}$ deformation retracts onto $\partial Q/\sim$, which is homeomorphic to the wedge sum of two circles (as before, even if the equivalent relation is different). Hence, by the Seifert–van Kampen Theorem, we obtain that

$$\pi_1\left(K \setminus \{p\}, x_0\right) = \pi_1(\partial Q/\sim, x_0) = \pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) = \pi_1(S^1, x_0) * \pi_1(S^1, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Now, similarly as in part (a), we define $A = (Q/\sim) \setminus \{(0,0)\}$, $B = \operatorname{int}(Q)$ and the generators of $\pi_1(A, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ as $a = [\alpha]$ and $b = [\beta]$ represented by the curves $\alpha, \beta \colon [0,1] \to A$ given by $\alpha(t) \coloneqq (-1+2t, -1) = (-1+2t, 1)$ and $\beta(t) \coloneqq (1, 1-2t) = (-1, -1+2t)$ (note that now the quotient on the boundary of Q is different). Then, a generator for the fundamental group of $A \cap B$ is $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta$ and by the Seifert–van Kampen Theorem, we have that

$$\pi_1(K, x_0) = (\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)) \big/ N = \pi_1(A, x_0) \big/ N = (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) \big/ N,$$

where N is the normal subgroup of $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ generated by $aba^{-1}b$.

This group is isomorphic to the semidirect product $\mathbb{Z} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, where the right copy of $\mathbb{Z}$ acts on the left copy of $\mathbb{Z}$ via $\alpha \colon \mathbb{Z} \to \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^\times : n \mapsto (-1)^n$. In other words, it is the set $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ with multiplication $(x,y) \cdot (x',y') = (x + (-1)^y x', y + y')$. The isomorphism can be constructed as follows: the homomorphism $\varphi \colon \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z} : a \mapsto (0,1), b \mapsto (1,0)$ induces a well-defined homomorphism $\overline{\varphi} \colon \mathbb{Z} * \mathbb{Z}/N \to \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$, because

$$\varphi(aba^{-1}b) = (0,1) \cdot (1,0) \cdot (0,-1) \cdot (1,0) = (-1,0) \cdot (1,0) = (0,0);$$

and it can be checked that $\overline{\varphi}$ is an isomorphism. This is typically called simply *the Klein bottle group*.

Übung 2. Sei $g \geqslant 2$. Wir definieren die *geschlossene, orientierbare Fläche* Σ_g *vom Geschlecht* g als Quotientenraum eines Polygons wie folgt. Sei P_{4g} ein (regelmäßiges) $4g$-seitiges Polygon, dessen Seiten im Uhrzeigersinn mit 0 bis $4g-1$ nummeriert seien. Dann ist Σ_g die Fläche, die man aus P_{4g} erhält, indem man für alle $S = 0, 4, 8, \ldots, 4(g-1)$ und für alle $S = 1, 5, 9, \ldots, 4(g-1)+1$ die im Uhrzeigersinn parametrisierte Seite S mit der im Gegenuhrzeigersinn parametrisierten Seite $S+2$ identifiziert.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Seifert und van Kampen die Fundamentalgruppe $\pi_1(\Sigma_g, x_0)$.

<u>*Lösung für Übung 2:*</u> Wie in Übung 1, Serie 10 benutzen wir den Satz von Seifert und van Kampen wie folgt: U ist das Polygon von Abbildung 1 ohne die Kanten, und V ist das Polygon ohne den Mittelpunkt. Dann haben wir $\pi_1(U \cap V, x_0) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(U) \cong 0$ und $\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$. Aber die Schleife γ, die $\pi_1(U \cap V, x_0) \cong \mathbb{Z}$ erzeugt, kann man auch als $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \cdots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}$ schreiben. Es gilt, dass

$$\pi_1(\Sigma_g) \cong \{\alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_g, \beta_g \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \cdots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}\}.$$

Übung 3. $(\star)$

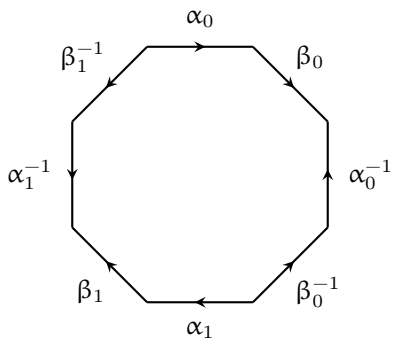


Abbildung 1: Beispiel für die Konstruktion von Σ_g durch Identifikation der Seiten eines $4g$-seitigen Polygons im Fall $g = 2$.

(a) Seien (X_1, x_1) und (X_2, x_2) zwei punktierte topologische Räume, die kontrahierbare offene Umgebungen $U_i \subseteq X_i$ von x_i besitzen für $i = 1, 2$. Finden Sie einen natürlichen Isomorphismus

$$\pi_1(X_1, x_1) * \pi_1(X_2, x_2) \cong \pi_1(X_1 \vee X_2, x_1 = x_2).$$

(b) Sei wie in der Vorlesung

$$H \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - \tfrac{1}{n})^2 + x_2^2 = \tfrac{1}{n^2}\right\}$$

der Hawaiianische Ohrring. Zeigen Sie, dass die natürliche Abbildung wie in (a)

$$\pi_1(H, 0) * \pi_1(H, 0) \to \pi_1(H \vee H, 0 = 0)$$

kein Isomorphismus ist.

Lösung für Übung 3:

(a) Seien $U = X_1 \vee_{x_1 = x_2} U_2$ und $V = X_2 \vee_{x_1 = x_2} U_1$ zwei offene Teilmengen von $X_1 \vee X_2$. Da U_1 und U_2 kontrahierbare offene Umgebungen sind, haben wir, dass $U \cap V \cong U_1 \vee_{x_1 = x_2} U_2$ kontrahierbar ist. Wir haben auch, dass $U = X_1 \vee_{x_1 = x_2} U_2$ (bzw. $V = X_2 \vee_{x_1 = x_2} U_1$) homotopieäquivalent zu X_1 (bzw. X_2) ist. Mit der Hilfe des Satzes von Seifert–van Kampen, ist die Abbildung $\iota^1_* * \iota^2_*$, wobei $\iota_i \colon X_i \to X_1 \vee X_2$ die Inklusion bezeichnet, ein Isomorphismus

$$\pi_1(X_1, x_1) * \pi_1(X_2, x_2) \to \pi_1(X_1 \vee X_2, x_1 = x_2).$$

(b) Es bezeichnen wie in (a) ι^1 und ι^2 die beiden Inklusionen $H \to H \vee H$. Sei $\gamma \colon [0, 1] \to H \vee H$ die Schleife

$$\gamma(s) = \begin{cases} \iota^{k \bmod 2}(1/k + \cos(2^{k+2}\pi s)/k, \sin(2^{k+2}\pi s)/k) & \text{falls } s \in [2^{-k}, 2^{-k-1}] \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{falls } s = 0. \end{cases}$$

Man sieht, dass $[\gamma] \in \pi_1(H \vee H, 0 = 0)$ nicht im Bild von $\pi_1(H, 0) * \pi_1(H, 0) \to \pi_1(H \vee H, 0 = 0)$ liegt.

Übung 4. Sei X die Menge aller Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Man betrachte die folgenden Topologien auf X: Produkttopologie; diskrete Topologie; indiskrete Topologie; von

$$B_{\varepsilon, f} = \{g \in X \mid \forall x \in \mathbb{R} : |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}$$

für alle $\varepsilon > 0, f \in X$ erzeugte Topologie; von

$$C_{\varepsilon, f, a, b} = \{g \in X \mid \forall x \in [a, b] : |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}$$

für alle $\varepsilon > 0, f \in X$ und $a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b$ erzeugte Topologie.

(a) Ordnen Sie diese Topologien nach Feinheit.

(b) Für jede dieser Topologien beschreibe man, was es für eine Folge $f_1, f_2, \ldots \in X$ bedeutet, gegen $g \in X$ zu konvergieren.

Lösung für Übung 4:

(a) Die diskrete Topologie ist immer die feinste Topologie und die indiskrete Topologie ist immer die gröbste Topologie. Wir bezeichnen mit $\mathcal{O}_1$ die Produkttopologie, und mit $\mathcal{O}_2$ und $\mathcal{O}_3$ die Topologien, die jeweils von $B_{\varepsilon,f}$ und $C_{\varepsilon,f,a,b}$ für alle ε, f, a und b erzeugt sind. Wir beschreiben zuerst eine Subbasis für die Produkttopologie. Wir bemerken, dass

$$X = \prod_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R}.$$

Nämlich haben wir $(f(x))_{x\in\mathbb{R}} \in \prod_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{R}$. Die Produkttopologie ist von

$$D_{\varepsilon,f,x} \coloneqq \{g \in X \mid |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}$$

für alle $\varepsilon > 0, f \in X, x \in \mathbb{R}$ erzeugt. Es ist jetzt klar, dass

$$D_{\varepsilon,f,x} = C_{\varepsilon,f,x,x} \text{ und } C_{\varepsilon,f,a,b} = \bigcup_{f' \in F} B_{\varepsilon,f'},$$

wobei $F \coloneqq \{f' \in X \mid f'|_{[a,b]} = f\}$. Das heisst, dass $\mathcal{O}_2$ feiner als $\mathcal{O}_3$ feiner als $\mathcal{O}_1$ ist.

(b) Für die diskrete und indiskrete Topologie ist es wie sonst.

- Die Folge f_n konvergiert gegen $g \in X$ bezüglich $\mathcal{O}_2$ wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N > 0$ existiert, sodass für alle $n \geqslant N$ und $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$. Dies nennt man gleichmässige Konvergenz, und entsprechend $\mathcal{O}_2$ die *Topologie der gleichmässigen Konvergenz*.
- Die Folge f_n konvergiert gegen $g \in X$ bezüglich $\mathcal{O}_3$ wenn für alle $\varepsilon > 0$ und $a \leqslant b$ ein $N > 0$ existiert, sodass für alle $n \geqslant N$ und $x \in [a, b]$, $|f_n(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$. Dies nennt man gleichmässige Konvergenz auf Kompakta, und entsprechend $\mathcal{O}_3$ die *Topologie der kompakten Konvergenz*. Auf $\mathbb{R}$ ist diese Konvergenz äquivalent zu *lokal gleichmässiger Konvergenz*.
- Die Folge f_n konvergiert gegen $g \in X$ bezüglich $\mathcal{O}_1$ wenn für alle $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ ein $N > 0$ existiert, sodass für alle $n \geqslant N$ gilt $|f_n(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$. Dies ist die punktweise Konvergenz.

Übung 5. ($\star$) Wir betrachten $\{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie. Wir haben in Serie 5, Übung 6 gesehen, dass

$$X \coloneqq \{0, 1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$$

(also der Raum aller Funktionen von der Potenzmenge der natürlichen Zahlen nach $\{0, 1\}$, mit der Produkttopologie) kompakt ist, weil $\{0, 1\}$ kompakt ist. Zeigen Sie jedoch, dass es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X ohne konvergente Teilfolgen gibt.

Lösung für Übung 5: Wir definieren eine Folge $(x_n)_n$ wie folgt, $x_n = (x_n^S)_{S\in\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ mit

$$x_n^S \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \in S \\ 0 & \text{wenn } n \notin S. \end{cases}$$

Damit eine Teilfolge $(x_{n_k})_{n_k}$ gegen $y = (y^S)_{S\in\mathcal{P}(\mathbb{N})} \in X$ in der Produkttopologie konvergiert, muss folgendes gelten: für alle $S \subset \mathbb{N}$ gibt es $N_S \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n_k \geqslant S_N$ gilt $x_{n_k}^S = y^S$. Sei $S = \{n_{2k} \mid k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ dass $x_{n_{2k}}^S = 1$ und $x_{n_{2k+1}}^S = 0$. Deshalb gibt es für dieses S kein geeignetes N_S. (In anderen Worten: wir haben eine Koordinate gefunden, bei der die Teilfolge nicht konvergiert – also konvergiert die Teilfolge nicht punktweise). Also hat diese Folge keine konvergente Teilfolge.

Übung 6. (⋆⋆) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ ein Homöomorphismus $f\colon [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ mit $f(x) = y$ existiert, d.h. scheinbare „Randpunkte“ wie z.B. die „Ecke“ $\{0\}_{n\in\mathbb{N}}$ unterscheiden sich nicht qualitativ von „inneren Punkten“ wie $\{\frac{1}{2}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung für Übung 6: Wir konstruieren im folgenden einen Homöomorphismus $f\colon [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ mit $f(0,0,\dots) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots)$. Als Baustein verwenden wir die "Drehung um $45°$" des Quadrats: Sei $\varphi\colon [0,1]^2 \to D^2$ der Homöomorphismus vom Quadrat auf die abgeschlossene Einheitskreisscheibe, der erst das Quadrat so verschiebt, dass sein Mittelpunkt im Ursprung liegt, und dann das Quadrat radial streckt (also den Winkel in der Polarform erhält), sodass man D^2 erhält. Nun sei

$$[0,1]^2 \to [0,1]^2, \qquad (x,y) \mapsto (\alpha(x,y), \beta(x,y))$$

die Komposition aus φ, Drehung der Einheitskreisscheibe um $45°$, und φ^{-1}. Dies ist ein Homöomorphismus des Quadrats, und es gilt $\alpha(0,0) = \frac{1}{2}$ und $\beta(0,0) = 0$.

Für $j \geqslant 1$ seien die Homöomorphismen $g^j, h^j\colon [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$g^j(x) = (x_1, \dots, x_{j-1}, \alpha(x_j, x_{j+1}), \beta(x_j, x_{j+1}), x_{j+2}, x_{j+3}, \dots).$$

$$h^j = g^j \circ g^{j-1} \circ \cdots \circ g^1.$$

Es gilt also

$$\begin{array}{lllllll}
h^1(x) &= (\alpha(x_1,x_2), & \beta(x_1,x_2), & x_3, & x_4, & \dots) & \\
h^2(x) &= (\alpha(x_1,x_2), & \alpha(\beta(x_1,x_2),x_3), & \beta(\beta(x_1,x_2),x_3), & x_4, & x_5, & \dots) \\
h^3(x) &= (\alpha(x_1,x_2), & \alpha(\beta(x_1,x_2),x_3), & \alpha(\beta(\beta(x_1,x_2),x_3),x_4), & \beta(\beta(\beta(x_1,x_2),x_3),x_4), & x_5, & x_6, \quad \dots) \\
\vdots &&&&&&
\end{array}$$

Nun definieren wir $f\colon [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ als $f(x) = \lim_{i\to\infty} h^j(x)$. Die Einträge von $f(x)$ sehen folgendermassen aus:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \alpha(x_1, x_2) \\
f_2(x) &= \alpha(\beta(x_1, x_2), x_3) \\
f_3(x) &= \alpha(\beta(\beta(x_1, x_2), x_3), x_4) \\
f_4(x) &= \alpha(\beta(\beta(\beta(x_1, x_2), x_3), x_4), x_5) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Es ist nicht schwierig, zu sehen dass f wohldefiniert ist und $(0,0,\dots)$ auf $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots)$ schickt. Der Beweis, dass f tatsächlich ein Homöomorphismus ist, ist aber aufwendig.

Serie 11

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Welche der Funktionenräume von Serie 10, Aufgabe 4 sind metrisierbar? In welcher dieser Funktionenräume ist die Menge der stetigen Funktionen abgeschlossen?

Lösung für Übung 1: Die diskrete Topologie ist immer metrisierbar, da $d(f,g) = \mathbb{1}_{f=g}$ eine Metrik ist, die die diskrete Topologie erzeugt. Für alle $a < b$ definieren wir $\|f\|_{[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Dann kann man sehen, dass die Metriken

$$d_2(f,g) \coloneqq \min\left(\|f-g\|_{(-\infty,+\infty)}, 1\right), \quad d_3(f,g) \coloneqq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\min\left(\|f-g\|_{I_n}, 1\right)}{2^n},$$

für eine Folge $I_0 \subset I_1 \subset \dots$ von Intervall mit $\bigcup I_n = \mathbb{R}$ die Topologie der gleichmässigen Konvergenz und der kompakten Konvergenz erzeugen.

Wir zeigen jetzt, dass die Produkttopologie nicht erstabzählbar ist. Dann folgt, dass keine Metrik existieren kann, die die Produkttopologie erzeugt. Eine Subbasis ist gegeben durch die Mengen

$$D_{\varepsilon,g,I} = \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid |f(x)-g(x)| < \varepsilon \ \forall x \in I\}$$

für alle $\varepsilon > 0$, $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $I \subset \mathbb{R}$ endlich. Angenommen, die offenen Umgebungen $D_{\varepsilon_n,g_n,I_n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ bilden eine Umgebungsbasis der Nullfunktion f. Sei $x \in \mathbb{R}\setminus\left(\bigcup I_n\right)$. Die offene Menge $D_{1,f,\{x\}}$ ist nicht in D_{ε_n,g,I_n} für irgendein n enthalten. Das bedeutet, dass die Menge aller Umgebungen D_{ε_n,g,I_n} kein Umgebungsbasis ist. Also ist die Topologie der punktweisen Konvergenz nicht metrisierbar.

Die indiskrete Topologie ist nicht Hausdorff, und damit nicht metrisierbar.

Sei die Folge

$$f_n(x) \coloneqq \begin{cases} x^n & \text{wenn } x \in [0,1] \\ 0 & \text{wenn } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{wenn } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Für alle n ist f_n stetig. Aber f_n konvergiert für die punktweise Konvergenz gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in (-\infty,1) \\ 1 & \text{wenn } x \in [1,+\infty)], \end{cases}$$

die nicht stetig ist. Eine abgeschlossene Menge ist auch folgenabgeschlossen.Es folgt, dass die Menge aller stetige Funktionen nicht abgeschlossen für die punktweise Konvergenz ist.

Man zeigt jetzt, dass wenn eine Folge f_n von stetigen Funktionen gegen $f \in X$ für die Topologie der kompakten Konvergenz konvergiert, dann ist f auch stetig. Da die Topologie der kompakten Konvergenz metrisierbar ist, impliziert dies, dass die Menge aller stetigen Funktionen abgeschlossen ist. Wir zeigen nun, dass f folgenstetig ist. Sei $(x_m)_m \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Sei $I = [a,b]$ ein Intervall mit $x \in (a,b)$. Dass die Folge f_n gegen f konvergiert heisst, dass die Folge $\|f_n - f\|_I$ gegen 0 konvergiert. Man nimmt o.B.d.A. auch an, dass $x_m \in I$ für all m. Wir haben

$$|f(x_m) - f(x)| \leqslant |f(x_m) - f_n(x_m)| + |f_n(x_m) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$$

und für $n, m \to \infty$ geht die rechte Seite gegen 0. Das heisst, dass die Folge $(f(x_m))_m$ gegen $f(x)$ konvergiert. Also ist f auch stetig und die Menge aller stetigen Funktionen abgeschlossene für die kompakten Konvergenz.

Die Topologie der gleichmässigen Konvergenz ist feiner als die Topologie der kompakten Konvergenz, also gilt, dass die Menge aller stetigen Funktionen abgeschlossen ist.

Übung 2.

(a) Ein topologischer Raum X heisst *separabel*, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält (d.h. es existiert eine abzählbare Teilmenge $A \subseteq X$ mit $\overline{A} = X$). Zeigen Sie, dass jeder topologische Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, separabel ist.

(b) Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie: ist X metrisierbar und separabel, so ist X zweitabzählbar.

Lösung für Übung 2:

(a) Sei X ein topologischer Raum, der das das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann gibt es eine abzählbare Basis $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ von X für eine abzählbare Menge I. Für alle $i \in I$ wählen wir ein $x_i \in B_i$ und definieren $A = \bigcup_{i\in I}\{x_i\}$. Die Menge A ist nach Konstruktion abzählbar und wir behaupten, dass $\overline{A} = X$ gilt. Angenommen, es gibt ein $x \in X \setminus \overline{A}$. Weil $\overline{A}$ abgeschlossen ist, ist $X \setminus \overline{A}$ offen. Also gibt es eine offene Menge U in X mit $x \in U \subseteq X \setminus \overline{A}$. Weil $\mathcal{B}$ eine Basis von X ist, gibt es nun ein $i \in I$ mit $x \in B_i \subseteq U$. Für das zu Beginn ausgewählte Element $x_i \in B_i$ gilt nun aber $x_i \in A \subseteq \overline{A}$, also $x_i \in \overline{A}$, im Widerspruch zu $x_i \in B_i \subseteq U \subseteq X \setminus \overline{A}$. Also gilt $\overline{A} = X$ wie behauptet.

(b) Sei $(x_n)_n$ eine dichte Folge in X und d eine Metrik aus X, die die Topologie über X erzeugt. Wir wollen zeigen, dass die Menge $\{B_d(x_n, 2^{-m}) \mid (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$ eine Basis für die Topologie ist. Nämlich sei U eine offene Menge. Da die Folge (x_n) dicht ist, kann man eine $x_n \in U$ finden. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $B_d(x_n, 2^{-m}) \subset U$. Es folgt, dass X zweitabzählbar ist.

Übung 3.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ mit der kofiniten Topologie nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

(b) Zeigen Sie auch, dass $\mathbb{R}$ mit der koabzählbaren Topologie nicht erstabzählbar ist. Hier ist eine Menge $U \subset \mathbb{R}$ offen bezüglich der koabzählbaren Topologie, falls U leer ist oder höchstens abzählbares Komplement hat.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung von $\mathbb{R}$ mit koabzählbarer Topologie nach $\mathbb{R}$ mit natürlicher Topologie, die x auf x schickt, folgenstetig ist, aber nicht stetig.

Lösung für Übung 3:

(a) Wir wählen einen Punkt aus $\mathbb{R}$, sagen wir 0, und nehmen an, dass es eine abzählbare Umgebungsbasis $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von 0 gibt. Wir können annehmen, dass U_k für alle $k \in \mathbb{N}$ von der Form $\mathbb{R} \setminus F_k$ für eine endliche Menge $F_k \subseteq \mathbb{R}$ ist. Dann ist $F \coloneqq \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ eine abzählbare Vereinigung von endlichen Mengen, also abzählbar. Da $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist, gibt es einen Punkt $x \in \mathbb{R}$ (in der Tat überabzählbar viele), der nicht in F enthalten ist. Somit ist $U = \mathbb{R} \setminus \{x\}$ eine offene Menge, die wegen $x \in U_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ keine der Mengen U_k enthält. Nun widerspricht dies wegen $0 \in U$ aber der Tatsache, dass $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis von 0 ist.

(b) Der gleiche Beweis wie in (a) funktioniert, da auch eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist.

(c) Um zu zeigen, dass die Abbildung, die x auf x schickt, von $\mathbb{R}$ mit der koabzählbaren Topologie nach $\mathbb{R}$ mit der natürlicher Topologie folgenstetig ist, müssen wir zeigen: Konvergiert eine Folge $(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gegen $x \in \mathbb{R}$ in der koabzählbaren Topologie, so konvergiert $(x_n)_n$ auch für die natürliche Topologie konvergiert gegen x. Nun ist $U = \left(\mathbb{R}\setminus\bigcup\{x_n\}\right) \cup \{x\}$ eine offene Menge in der koabzählbaren Topologie. Wenn x_n gegen x konvergiert, haben wir dann dass für alle genügend grossen $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in U$. Es folgt, dass x_n konstant gleich x ist, für n gross genug. Also konvergiert $(x_n)_n$ auch für die natürliche Topologie gegen x.

Diese Abbildung ist aber nicht stetig, weil z.B. $(0, 1)$ offen für die natürliche Topologie, aber nicht für die koabzählbare Topologie ist.

Übung 4. $(\star)$ Sei X eine zusammenhängende kompakte eindimensionale Mannigfaltigkeit. Wie folgt beweise man, dass X homöomorph zu S^1 ist:

(a) Zeigen Sie, dass es eine endliche Überdeckung $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ durch offene Mengen $U_i \subseteq X$ mit Homöomorphismen $\varphi_i \colon U_i \to \mathbb{R}$ gibt.

(b) Man nehme im folgenden an, dass n minimal ist. Man zeige, dass $n \geqslant 2$.

(c) Zeigen Sie, dass ein $j \in \{2, \dots, n\}$ mit $U_1 \cap U_j \neq \varnothing$, $U_1 \setminus U_j \neq \varnothing$ und $U_j \setminus U_1 \neq \varnothing$ existiert.

(d) Sei o.B.d.A. $j = 2$. Sei Z eine Zusammenhangskomponente von $U_1 \cap U_2$. Zeigen Sie, dass $\varphi_1(Z)$ entweder gleich $(-\infty, a)$ oder gleich (b, ∞) ist, für $a, b \in \mathbb{R}$. Folgern Sie, dass $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ entweder gleich $(-\infty, a)$ (Fall 1), oder gleich (b, ∞) (Fall 2), oder gleich $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ (Fall 3) ist, für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(e) In den ersten beiden Fälle aus (d) ist $U_1 \cup U_2$ ebenfalls zu $\mathbb{R}$ homöomorph, was gegen die Minimalität von n verstösst.

(f) Im dritten Fall aus (d) ist $U_1 \cup U_2$ zu S^1 homöomorph.

(g) Da S^1 kompakt ist, ist $U_1 \cup U_2 \subseteq X$ abgeschlossen; es folgt $n = 2$ und damit $X \cong S^1$.

Lösung für Übung 4:

(a) Für alle $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U_x von x mit einem Homöomorphismus $\varphi_x \colon U_x \to \mathbb{R}$. Dann $X = \bigcup_{x \in X} U_x$. Da X ist kompakt, können wir eine endliche Teilüberdeckung $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ finden.

(b) Wäre n gleich 1 ist, hätten wir, dass $U_1 = X$ und X zu $\mathbb{R}$ homöomorph ist. Aber $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt. Das ist ein Widerspruch. Es folgt, dass $n \geqslant 2$.

(c) Wäre $U_1 \cap U_j$ leer für alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, so wäre

$$\bigcup_{j \geqslant 2} U_j \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_1^{-1}((-n, n))$$

eine Überdeckung von X, die keine endliche Teilüberdeckung hat. Das widerspricht der Tatsache, dass X kompakt ist. Also gibt es $j \in \{2, \dots, n\}$ mit $U_1 \cap U_j \neq \emptyset$. Wäre $U_1 \setminus U_j$ die leere Menge, könnten wir $U_2 \cup \ldots \cup U_n$ als die Überdeckung von X nehmen. Dies wäre ein Widerspruch zur Minimalität von n. Aus dem gleichen Grund gilt es, dass die Menge $U_j \setminus U_1$ auch nicht leer ist.

(d) Zuerst bemerken wir, dass $U_1 \cap U_2$ und Z offene Mengen sind. Da Z zusammenhängend ist, folgt, dass $\varphi_1(Z)$ ein Intervall ist. Es folgt, dass $\varphi_1(Z) = (a, b)$. Da $U_1 \not\subset U_2$, ist es nicht möglich, dass $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Als nächstes wollen wir zeigen, dass entweder $a = -\infty$ oder $b = \infty$ gilt. Wir nehmen also an, dass a und b beide nicht $\pm\infty$ sind, und leiten einen Widerspruch her. Es gilt $\varphi_2(Z) = (c, d)$. Nun ist $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ ein Homöomorphismus $(a, b) \to (c, d)$. Ein solcher Homöomorphismus muss eine streng monoton fallende, oder eine streng monoton wachsende Funktion sein. Sei $(x_n)_n \in Z^{\mathbb{N}}$ eine Folge, sodass $(\varphi_1(x_n))_n$ gegen a konvergiert. Es folgt, dass x_n gegen $\varphi_1^{-1}(a)$ konvergiert. Dann konvergiert $(\varphi_2(x_n))_n$ gegen c oder gegen d (wobei $c = -\infty$ bzw. $d = +\infty$) möglich ist. Betrachte den Fall, dass es gegen c konvergiert (der andere Fall verläuft analog). Falls $c \neq -\infty$, so folgt, dass x_n gegen $\varphi_2^{-1}(c)$ konvergiert. Aber nach Konstruktion ist $\varphi_1^{-1}(a) \neq \varphi_2^{-1}(c)$. Dies steht im Widerspruch dazu, dass X Hausdorff ist (da dies die Eindeutigkeit von Grenzwerten impliziert). Also folgt $c = -\infty$ oder $d = +\infty$. Analog (durch Vertauschen der Rollen) folgt $a = -\infty$ oder $b = +\infty$.

Für eine weitere Zusammenhangskomponenten $Z' \subset U_1 \cap U_2$ gilt das gleiche. Man sieht, dass es keine dritte Zusammenhangskomponente geben kann. Es folgt, dass genau die drei in (d) genannten Fälle auftreten können.

(e) Betrachten wir den Fall $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = (-\infty, b)$ und $\varphi_2(U_1 \cap U_2) = (c, \infty)$. Die anderen Fälle lassen sich ähnlich lösen. Seien $\psi_1 \colon (-\infty, \infty) \to (1, \infty)$ und $\psi_2 \colon (-\infty, c] \to (-\infty, 1]$ zwei streng monoton wachsende Homöomorphismen. Wir bauen einen Homöomorphismus

$$\begin{aligned} \psi \colon U_1 \cup U_2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \psi_1(\varphi_1(x)) & \text{wenn } x \in U_1, \\ \psi_2(\varphi_2(x)) & \text{wenn } x \in U_2 \setminus U_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Abbildung ψ ist stetig dank des Verklebungslemmas.

(f) Seien $V_1 = \{(x,y) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2, x \geqslant -1/2\}$ und $V_2 = \{(x,y) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2, x \leqslant 1/2\}$ zwei offenen Mengen. Mit Homöomorphismen $U_1 \cong V_1$ und $U_2 \cong V_2$ wie in (e) können wir einen Homöomorphismus zwischen $U_1 \cup U_2$ und $V_1 \cup V_2 = S^1$ bauen.

(g) Es folgt, dass $U_1 \cup U_2$ eine Zusammenhangskomponente von X ist. Das heisst, dass $X \cong U_1 \cup U_2 \cong S^1$.

Übung 5. Unter welchen Konstruktionen (wie z.B. Unterräume, feinere Topologie, abzählbare Produkte, ...) bleiben Erst- und Zweitabzählbarkeit jeweils erhalten?

Lösung für Übung 5:

Lemma 1. *Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ ein Unterraum von X. Wenn X erst- bzw. zweitabzählbar ist, ist Y auch erst- bzw. zweitabzählbar.*

Beweis. Für $x \in Y \subseteq X$ gibt es eine Umgebungsbasis $U_n \ni x$ für x in X. Dann ist $U_n \cap Y$ eine Umgebungsbasis für x in Y. Dies heisst, dass sich Erstabzählbarkeit an Unterräume vererbt. Für Zweitabzählbarkeit funktioniert der Beweis ähnlich. □

Auf einer beliebigen Menge X sind sowohl die diskrete als auch die indiskrete Topologie erstabzählbar. Also bleibt Erstabzählbarkeit im Allgemeinen nicht darunter erhalten, dass man eine feinere oder gröbere Topologie betrachtet.

Auch Zweitabzählbarkeit vererbt sich i.A. weder an feinere noch an gröbere Topologien – finden Sie hierfür Beispiele?

Lemma 2. *Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ topologischen Räume, die erst- bzw. zweitabzählbar sind. Dann ist das Produkt $\prod_n X_n$ auch erst- bzw. zweitabzählbar.*

Beweis. Wir zeigen das Lemma für die Zweitabzählbarkeit. Sei $(U_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ ein Basis für die Topologie von X_n. Sei $f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ eine bijektive Funktion. Aus der Definition der Produkttopologie sehen wir, dass

$$\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times U_{f_2(n)}^{f_1(n)} \times \mathbb{R} \times \cdots\right)_n$$

eine Subbasis für $\prod_n X_n$ ist. Es existiert also eine abzählbare Subbasis. Aus ihr erhält man (indem man beliebige Schnitte endlich vieler Mengen in der Subbasis nimmt) eine abzählbare Basis. □

Eine überabzählbare Produkt von zweitabzählbaren topologischen Räume ist in der Regel nicht zweitabzählbar. Zum Beispiel ist das Produkt von $|\mathbb{R}|$ Kopien von $\mathbb{R}$ nicht zweitabzählbar und nicht erstabzählbar, siehe Übung 1.

Serie 12

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Sei X ein zusammenhängender normaler Hausdorffraum mit mindestens zwei Punkten. Zeigen Sie, dass X überabzählbar ist.

Lösung für Übung 1: Sei X ein zusammenhängender normaler Hausdorffraum und seien $x, y \in X$ zwei verschiedene Punkte. Dann sind die Mengen $\{x\}$ und $\{y\}$ (vgl. Vorlesung/Serie aus Woche 3) abgeschlossen. Nach dem Urysohnschen Lemma gibt es eine stetige Abbildung $f\colon X \to [0,1]$ mit $f(x) = 0$ und $f(y) = 1$. Wir zeigen, dass f surjektiv ist. Die Behauptung folgt dann aus der Überabzählbarkeit von $[0,1]$, denn die Niveaumengen $f^{-1}(\{t\})$, $t \in [0,1]$, sind disjunkt und es gibt überabzählbar viele von ihnen. Wir zeigen die Kontraposition, d.h. dass aus f nicht surjektiv folgt, dass X nicht zusammenhängend ist. Falls f nicht surjektiv ist und $s \in [0,1]$ nicht im Bild von f ist, so sind die Urbilder $f^{-1}\big([0,s)\big)$ und $f^{-1}\big((s,1]\big)$ offen, disjunkt und nicht leer (da $f(x) = 0$ und $f(y) = 1$). Somit ist X nicht zusammenhängend, im Widerspruch zur Annahme.

Übung 2. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass die Funktion $\delta\colon X \to [0,\infty)$ gegeben durch

$$x \mapsto d(x,A) \coloneqq \inf_{y\in A} |d(x,y)|$$

stetig ist und dass $\delta(x) > 0$ für alle $x \notin A$ gilt. Wo gibt es ein Problem, wenn A nicht abgeschlossen ist?

(b) Zeigen Sie das Urysohnsche Lemma für den metrischen Raum X ohne auf die Sätze oder Ideen der Vorlesungen aus der Woche 12 zu verweisen.

Lösung für Übung 2:

(a) Aus der Dreiecksungleichung folgt, dass

$$\begin{aligned}\delta(x) = \inf_{z\in A} d(x,z) &\leqslant \inf_{z\in A} \big(d(x,y) + d(y,z)\big) = d(x,y) + \inf_{z\in A} d(y,z)\\ &= d(x,y) + \delta(y).\end{aligned}$$

Somit ist $\delta(x) - \delta(y) \leqslant d(x,y)$. Analog gilt (vertauschen von x und y), dass $\delta(y) - \delta(x) \leqslant d(x,y)$. Damit ist

$$|\delta(x) - \delta(y)| \leqslant d(x,y),$$

d.h. δ ist 1-Lipschitz stetig (und insbesondere stetig). Beachten Sie, dass wir dazu nicht benötigt haben, dass A abgeschlossen ist.

Sei nun $x \notin A$. Da A abgeschlossen ist, ist $X \setminus A$ offen und somit gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B(x,\epsilon) \in X \setminus A$. Folglich gilt für alle $y \in A$, $d(x,y) \geqslant \epsilon$, womit $\delta(x) \geqslant \epsilon > 0$ gezeigt ist.

Falls A nicht abgeschlossen ist, muss für $x \notin A$ nicht zwingend $\delta(x) > 0$ gelten. Sei zum Beispiel $X = \mathbb{R}$ und $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist $\delta(0) = 0$.

(b) Seien $A, B \subseteq X$ disjunkte abgeschlossene Mengen. Dann ist die Funktion $f\colon X \to [0,1]$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

wohldefiniert und stetig ist und es gilt $f(a) = 0$ für alle $a \in A$ und $f(b) = 1$ für alle $b \in B$.

Übung 3.

(a) Ein topologischer Raum heisst *lokalkompakt*, falls jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat. Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Zeigen Sie, dass für alle $x \in X$ und abgeschlossene $A \subset X$ mit $x \notin A$ offene disjunkte Mengen $U, V \subset X$ existieren, sodass $x \in U$ und $A \subset V$.

(b) Zeigen Sie, dass ein kompakter Hausdorffraum normal ist.

Lösung für Übung 3:

(a) Wir zeigen zuerst das folgende Lemma.

Lemma 1. *Sei X ein Hausdorffraum und $A \subsetneq X$ ein kompakter Unterraum. Sei $x \in X \backslash A$. Es existieren disjunkte offene Mengen $U, V \in X$ mit $x \in U$ und $A \subset V$.*

Beweis. Weil X ein Hausdorffraum ist, kann man für alle $a \in A$ disjunkte offene Menge U_a und V_a finden, sodass $x \in U_a$ und $a \in V_a$. Dann ist $(V_a)_{a \in A}$ eine Überdeckung von A. Da A kompakt ist, finden wir $a_1, a_2, \dots, a_n$ mit $\bigcup_{i=1}^n V_{a_i} \supset A$. Wir definieren $U = \bigcap_{i=1}^n U_{a_i}$ und $V = \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$. Wir sehen, dass U und V offen und disjunkt sind. Wir haben auch, dass $x \in U$ und $A \subset V$. □

Sei K eine kompakte Umgebung des Punkts x. Die Menge $A \cap K$ ist als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums selbst kompakt. Aus Lemma 1 folgt, dass zwei disjunkte offene Teilmengen $\widetilde{U}$ und $\widetilde{V}$ von K existieren, sodass $x \in \widetilde{U}$ und $A \cap K \subseteq \widetilde{V}$. Wir definieren $U := \widetilde{U} \cap K^\circ$ und $V = \widetilde{V} \cup (X \backslash K)$. Dies sind Mengen mit den gewünschten Eigenschaften.

(b) Seien A und B zwei abgeschlossene Menge von X. Da X kompakt ist, sind A und B auch kompakt. Wir können dann Lemma 1 benutzen um für alle $a \in A$ disjunkte offene Menge $U_a, V_a \subset X$ mit $a \in U_a$ und $B \subset V_a$ zu finden. Weil A kompakt ist, finden wir $a_1, \dots, a_n$ mit $\bigcup_i U_{a_i} \supset A$. Dann führen wir den Beweis wie in Lemma 1 zu Ende.

Übung 4. (⋆) Wir wollen zeigen, dass wir kompakte Mannigfaltigkeiten in „schöne" topologische Räume einbetten können. Zur Erinnerung: Mit *Einbettung* meinen wir hier Homöomorphismus aufs Bild. Ein Korollar der folgenden Aussage ist auch, dass alle kompakten Mannigfaltigkeiten metrisierbar sind.

Sei M eine beliebige kompakte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass M in $\mathbb{R}^N$ eingebettet werden kann.

Lösung für Übung 4: Sei $\{U_i\}_{i=1,\dots,k}$ eine endliche Überdeckung der kompakten Mannigfaltigkeit M mit Mengen U_i, die Homöomorphismen $\varphi_i \colon U_i \to \mathbb{R}^n$ zulassen. Wir definieren für alle $i = 1, \dots, k$

$$\widetilde{\psi}_i \colon M \to S^n$$
$$x \mapsto \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{wenn } x \in U_i \\ N & \text{wenn } x \notin U_i, \end{cases}$$

wo $\mathbb{R}^n \cup \{N\} \cong S^n$ die Einpunktkompaktifizierung (vgl. Serie 4, Übung 6) von $\mathbb{R}^n$ ist. Man prüft, dass $\widetilde{\psi}_i$ stetig ist. Wir haben eine natürliche Einbettung $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, und Verknüpfen ergibt eine stetig Abbildung $\psi_i \colon U_i \to \mathbb{R}^{n+1}$. Wir definieren $\Psi \colon M \to (\mathbb{R}^{n+1})^k$ als $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_k)$. Wir zeigen jetzt, dass Ψ eine Einbettung ist.

Seien $x \neq y \in M$. Falls $x \in U_i$ und $y \notin U_i$, haben wir $\psi_i(x) \neq N = \psi_i(y)$, also $\Psi(x) \neq \Psi(y)$. Falls $x, y \in U_i$, dann $\psi_i(x) \neq \psi_i(y)$, also $\Psi(x) \neq \Psi(x)$. Das heisst, dass Ψ injektiv ist. Da Ψ eine injektiv und stetige Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum ist, ist Ψ eine Einbettung.

Übung 5. Zeigen Sie, dass eine Überlagerung (mit höchstens abzählbaren Fasern) einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit wieder eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Lösung für Übung 5: Wir sollen zeigen, dass eine Überlagerung $p \colon X \to M$ einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit M wieder ein Hausdorffraum, lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^d$, und zweitabzählbar ist.

Seien $x, y \in X$. Falls $p(x) \neq p(y)$ und weil M ein Hausdorffraum ist, können wir zwei disjunkte offene Menge $U, V \in M$ finden, sodass $p(x) \in U$ und $p(y) \in V$. Dann sind die Menge $p^{-1}(U) \ni x$ und $p^{-1}(V) \ni y$ disjunkt und

offen. Falls $p(x) = p(y)$, so gibt es eine offene Menge $U \ni p(x)$, sodass $p^{-1}(U) \cong U \times S$ mit S einer höchstens abzählbaren Menge mit der diskreten Topologie. Seien $s_1, s_2 \in S$ mit $x \in U \times \{s_1\}$ und $y \in U \times \{s_2\}$, dann sind $U \times \{s_1\}$ und $U \times \{s_2\}$ disjunkte offene Menge. Das zeigt, dass X **Hausdorff** ist.

Seien $x \in X$ und $U \subset M$, sodass $p(x) \in U$, $U \cong \mathbb{R}^d$ und $p^{-1}(U) \cong U \times S$ mit S eine höchstens abzählbare Menge mit der diskrete Topologie. Es gibt $s \in S$ mit $x \in U \times \{s\}$, sodass $U \times \{s\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^d$ ist. Das heisst, dass X lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^d$ ist.

Sei $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ einen Basis der Mannigfaltigkeit M. Durch Weglassen einiger U_i können wir annehmen, dass alle U_i gleichmässig überlagert sind. Dann ist $p^{-1}(U_i) \cong U_i \times S_i$ und die Familie $(U_i \times \{s\})_{i\in\mathbb{N}, s\in S_i}$ ist Basis der Topologie von X. Das heisst, dass X zweitabzählbar ist.

Übung 6. Man zeichne auf der Rückseite alle bekannten Implikationen ein (auch diejenigen der Form $A \wedge B \Rightarrow C$ für Eigenschaften A, B, C).

Lösung für Übung 6: Wir haben

(i) Zweitabzählbar $\Rightarrow$ erstabzählbar (aus einer Basis der Topologie erhält man eine Umgebungsbasis von x, indem man alle Umgebungen von x aus der Basis nimmt).

(ii) Achtung! Im Generell, normal $\not\Rightarrow$ Hausdorff weil Punkten nicht abgeschlossen sein müssen. Wenn die Punkten abgeschlossen sind, ist ein normaler Raum auch Hausdorff.

(iii) Metrisierbar $\Rightarrow$ Hausdorff (offene Bälle können Punkten separieren).

(iv) Metrisierbar $\Rightarrow$ erstabzählbar (siehe Vorlesung).

(v) Metrisierbar $\Rightarrow$ normal (Übung 2, (b)).

(vi) Aus der Definition, Mannigfaltigkeit $\Rightarrow$ Hausdorff und zweitabzählbar.

(vii) Mannigfaltigkeit $\Rightarrow$ lokalkompakt, weil $\mathbb{R}^n$ lokalkompakt ist.

(viii) Erstabzählbar und Kompakt $\Rightarrow$ folgenkompakt (Vorlesungsnotizen, Satz 14.2).

(ix) Zweitabzählbar und Folgenkompakt $\Rightarrow$ Kompakt (Vorlesungsnotizen, Satz 14.2).

(x) Metrisierbar und Folgenkompakt $\Rightarrow$ Kompakt (Analysis II).

(xi) Achtung! Wir haben Folgenkompakt $\not\Rightarrow$ Kompakt (Übung für Sie) und Kompakt $\not\Rightarrow$ Folgenkompakt (Serie 10, Übung 5).

(xii) Mannigfaltigkeit und Kompakt $\Rightarrow$ Metrisierbar (Übung 4).

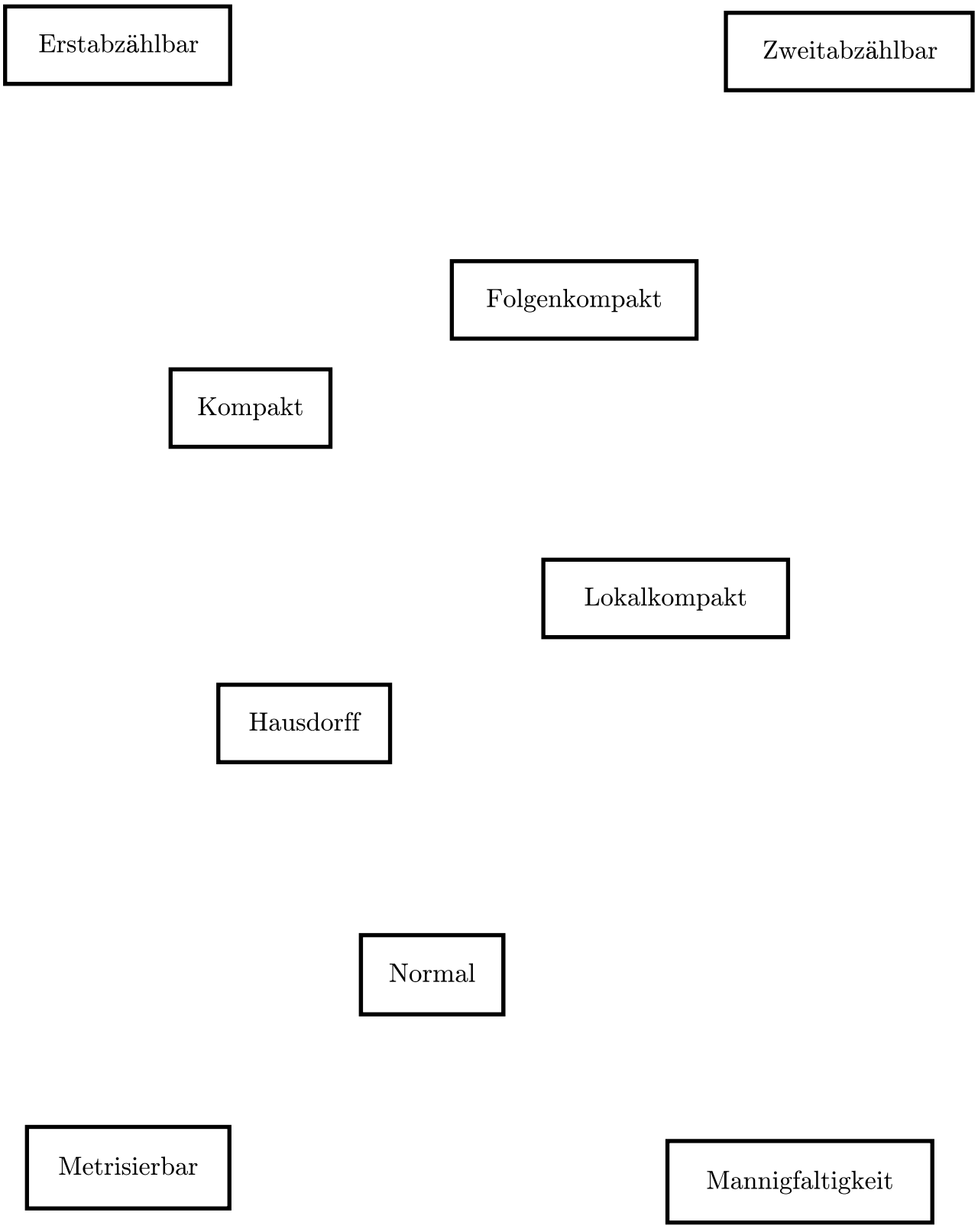
(xiii) Tatsächlich gilt sogar: Mannigfaltigkeit $\Rightarrow$ Metrisierbar.

(xiv) Kompakt und Hausdorff $\Rightarrow$ normal (Übung 3, (b)).

(xv) Lokalkompakt und Hausdorff $\Rightarrow$ *regulär*, d.h. man kann Punkten aus abgeschlossene Menge separieren (Übung 3, (a)).

(xvi) Kompakt $\Rightarrow$ Lokalkompakt (nach Definition)

Haben wir etwas vergessen?


Erstabzählbar
Zweitabzählbar
Folgenkompakt
Kompakt
Lokalkompakt
Hausdorff
Normal
Metrisierbar
Mannigfaltigkeit

Serie 13

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Abbildung p ist ein lokaler Homöomorphismus (d.h. jeder Punkt in Y hat eine offene Umgebung V sodass $p(V) \subset X$ offen und $p|_V$ ein Homöomorphismus aufs Bild ist).

(b) Falls $p^{-1}(x)$ für alle $x \in X$ einelementig ist, dann ist p ein Homöomorphismus.

Lösung für Übung 1: Wir zeigen zunächst (a). Zu zeigen ist, dass für jeden Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung V von y existiert, sodass $p(V) \subseteq X$ offen und $p|_V\colon V \to p(V)$ ein Homöomorphismus ist. Sei $y \in Y$ und $x := p(y)$.

Es existiert eine gleichmässig überlagerte offene Umgebung U von x mit Blättern U_j für $j \in J$ und einer Indexmenge J. Wegen $y \in p^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{j\in J} U_j$ gibt es genau ein $j \in J$ mit $y \in U_j$. Nach Definition ist $p^U_{U_j} = p|_{U_j}\colon U_j \to U$ ein Homöomorphismus, d.h. wir können $V = U_j$ setzen.

Teil (b) folgt direkt aus Teil (a), denn ein bijektiver lokaler Homöomorphismus ist auch ein (globaler) Homöomorphismus.

Übung 2. Sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung, $A \subseteq X$ eine Teilmenge mit der Unterraumtopologie und $B := p^{-1}(A)$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $p|_B\colon B \to A$ eine Überlagerung ist.

Lösung für Übung 2: Fix any point $x \in A$. Since $p\colon Y \to X$ is a covering map, there exists an evenly covered (="gleichmässig überlagert") open neighborhood U of x in X. Namely $p^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} V_i$, where V_i are disjoint open sets and $p|_{V_i}\colon V_i \to U$ is a homeomorphism for all $i \in I$.

We claim that $U^A := U \cap A$ is an evenly covered open neighborhood of x in A with respect to the map $p|_B\colon B \to A$. First observe that $(p|_B)^{-1}\left(U^A\right) = p^{-1}\left(U^A\right) = \cup_{i\in I} V_i^A$, where $V_i^A := V_i \cap B$ are pairwise disjoint open subsets of B. Moreover $p|_{V_i^A}\colon V_i^A \to p(V_i^A) = U^A$ maps homeomorphically V_i^A into U^A, since it is the restriction to V_i^A of the homeomorphism $p|_{V_i}\colon V_i \to U$. This concludes the proof by arbitrariness of $x \in A$.

Übung 3.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $p_n\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$, eine Überlagerung ist.

(b) (⋆) Sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom, das nicht konstant ist. Zeigen Sie, dass man Punkte $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ finden kann, so dass die Abbildung

$$P\colon \mathbb{C} \setminus P^{-1}(\{z_1, z_2, \dots, z_n\}) \to \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$$

eine Überlagerung ist.

Lösung für Übung 3:

(a) Die n-ten Einheitswurzeln, also die Lösungen von $z^n = 1$, sind $\xi_k := e^{2\pi i k/n} = \cos(2\pi k/n) + i\sin(2\pi k/n)$ für $k = 1, \dots, n$. Wir schreiben $w \in \mathbb{C}^*$ als $w = re^{i\theta}$ für $r > 0$ und $\theta \in [0, 2\pi)$. Dann gilt

$$p_n^{-1}(w) = \left\{ r^{1/n} e^{i\theta/n} \xi_1, \dots, r^{1/n} e^{i\theta/n} \xi_n \right\}.$$

Die Fasern von p_n sind also endlich (mit Kardinalität n), insbesondere diskret. Weiter ist klar, dass p_n stetig und surjektiv ist. Es bleibt zu zeigen, dass p_n die Überlagerungsbedingung erfüllt.

Sei nun $w = r_0 e^{i\theta_0} \in \mathbb{C}^*$. Dann ist die Menge $U := \left\{ re^{i\theta} \mid r > 0,\ |\theta - \theta_0| < \pi/2 \right\} \subseteq \mathbb{C}^*$ eine offene Umgebung von w. Gemäss obiger Überlegung erhalten wir $p_n^{-1}(U) = \bigcup_{k=1}^n V_k$, wobei

$$V_k := \left\{ r^{1/n} e^{i\theta/n} \xi_k \mid\ |\theta - \theta_0| < \pi/2 \right\}.$$

Wir bemerken zunächst, dass $V_k \cap V_h = \emptyset$ für alle $k \neq h$ gilt: Angenommen, $r^{1/n} e^{i\theta/n} \xi_k = r^{1/n} e^{i\theta'/n} \xi_h$ für $\theta, \theta' \in (\theta_0 - \pi/2, \theta_0 + \pi/2)$ und $k \neq h$, dann gilt

$$\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} \equiv \frac{\theta'}{n} + \frac{2\pi h}{n} \pmod{2\pi}$$
$$\iff \theta - \theta' \equiv 2\pi(h-k) \pmod{2\pi n}.$$

Es gilt jedoch $|\theta - \theta'| < \pi < 2\pi|h-k| < 2\pi n$, was der letzten Gleichheit modulo $2\pi n$ widerspricht. Also sind $\{V_k\}_{k=1,\dots,n}$ paarweise disjunkt. Weiterhin ist es einfach zu sehen, dass $p_n|_{V_k} \colon V_k \to U$ eine stetige Bijektion ist für alle $k = 1, \dots, n$. Ausserdem ist $(p_n|_{V_k})^{-1} \colon U \to V_k$ gegeben durch

$$(p_n|_{V_k})^{-1}\left(e^{i\theta}\right) = e^{i\theta/n} \xi_k$$

für alle $e^{i\theta} \in U$, also für $|\theta - \theta_0| < \pi/2$. Also ist $(p_n|_{V_k})^{-1}$ ebenfalls stetig und $p_n|_{V_k} \colon V_k \to U$ somit ein Homöomorphismus für alle $k = 1, \dots, n$. Die Mengen V_k sind die Blätter von p_n über der gleichmässig überlagerten Menge U.

(b) Wir zeigen das folgende Lemma.

Lemma 1. *Sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom und $x \in \mathbb{C}$ mit $P'(x) = c \neq 0$. Dann existiert eine Umgebung von x, sodass $P|_U$ ein Homöomorphismus zwischen U und $P(U)$ ist.*

Beweis. Bei x haben wir $P(z) = f(x) + c(z-x) + o((z-x)^2)$. Wenn r klein genug ist, ist $P|_{\overline{B(x,r)}}$ bijektiv und stetig. Der Definitionsbereich von $P|_{\overline{B(x,r)}}$ ist Hausdorff und $\overline{B(x,r)}$ ist kompakt. Mit Satz 5 in der Vorlesung 4 haben wir, dass P ein Homöomorphismus ist. □

Bemerkung 1. *Man kann auch den Umkehrsatz (inverse function theorem) benutzen.*

Sei $S = (P')^{-1}(\{0\})$. Da P' ein Polynom ist und P' nicht null ist, ist S eine endliche Menge. Sei nun $\{z_1, \dots, z_n\} = P(S)$. Wir zeigen jetzt, dass

$$P \colon \mathbb{C} \setminus P^{-1}(\{z_1, z_2, \dots, z_n\}) \to \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$$

eine Überlagerung ist. Sei $x \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, dann gilt für alle $y \in P^{-1}(\{x\})$, dass $P'(y)$ nicht gleich 0 ist. Seien $y_1, y_2, \dots, y_m$ die Elemente aus $P^{-1}(\{x\})$. Mit dem Lemma finden wir $U_1, \dots, U_m$ disjunkte (falls nicht disjunkt, nehme kleine Umgebungen) Umgebungen von $y_1, y_2, \dots, y_m$, sodass $P|_{U_i}$ ein Homöomorphismus ist. Sei $U \coloneqq \bigcap P(U_i)$. Dann ist U gleichmässig überlagert. Die Übung folgt.

Übung 4. (⋆) Seien X, Y, Z topologische Räume und seien $p \colon X \to Y$ und $q \colon Y \to Z$ Überlagerungen. Weiter sei $q^{-1}(z)$ für alle $z \in Z$ eine endliche Menge. Zeigen Sie, dass $q \circ p \colon X \to Z$ eine Überlagerung ist.

Lösung für Übung 4: Let $z \in Z$, let $y_1, \dots, y_n$ be the preimages of z with respect to the map q (by assumption they are in finite number), and let U be an evenly covered neighborhood of z (with respect to the cover $q \colon Y \to Z$). For all $i = 1, \dots, n$, let U_i be an evenly covered open neighborhood of y_i (with respect to the cover $p \colon X \to Y$) and define $V_i \coloneqq U_i \cap q^{-1}(U)$. Note that for every $i = 1, \dots, n$ we have that:

- V_i is an open neighborhood of y_i;
- $q|_{V_i}$ is a homeomorphism between V_i and $q(V_i)$;
- V_i is an evenly covered neighborhood for $p \colon X \to Y$.

Now, we can define $W \subseteq Z$ as

$$W \coloneqq \bigcap_{i=1}^{n} q(V_i).$$

Since n is finite, W is an open subset of Z. Moreover, since W is contained in an evenly covered neighborhood of z (with respect to $q \colon Y \to Z$), we have that W is an evenly covered neighborhood of z as well. On the other hand,

since $q^{-1}(W) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, we have that $q^{-1}(W) = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$, where W_i is contained in V_i for all $i = 1, \dots, n$, thus W_i are disjoint evenly covered neighborhoods of y_i (with respect to p).

We claim that W is an evenly covered open neighborhood of z with respect to $q \circ p$. Note that we have $(q \circ p)^{-1}(W) = \bigcup_{i=1}^{n} p^{-1}(W_i)$, where $p^{-1}(W_i)$ are pairwise disjoint (since W_i are pairwise disjoint). Moreover, since every W_i is an evenly covered neighborhood for the covering map p, we have that $p^{-1}(W_i) = \bigcup_{j \in J_i} T_i^j$, where $T_j^i \subseteq X$ are disjoint subsets and $p|_{T_i^j} \colon T_i^j \to W_i$ is a homeomorphism. As a result we have that $(q \circ p)|_{T_i^j} = q|_{W_i} \circ p|_{T_i^j} \colon T_i^j \to W$ is a homeomorphism, because it is the composition of two homeomorphism. Thus, W is an evenly covered neighborhood of $z \in Z$ with respect to $q \circ p$. Since $z \in Z$ was arbitrary, this concludes the proof.

An example of a composition of two covering maps (without the assumption that q is a finite covering) that is not a covering map can be found in Hatcher, exercise 1.3.6 (p. 79).

Übung 5. Sei $f \colon S^1 \to S^1$,

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{wenn } \mathrm{Im}(z) \geqslant 0 \\ \bar{z}^2 & \text{wenn } \mathrm{Im}(z) \leqslant 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: die Abbildung f ist stetig, für alle $z \in S^1$ hat $f^{-1}(z)$ zwei Elemente, und jedes $z \in S^1$ hat eine offene Umgebung U sodass $f^{-1}(U)$ homöomorph zu $U + U$ ist; aber f ist keine Überlagerung.

Lösung für Übung 5: Für eine einfachere Schreibweise identifizieren wir S^1 mit $X = [0, 2\pi]/\{0, 2\pi\}$ (via $t \mapsto e^{it}$), d.h. das Intervall $[0, 2\pi]$, dessen Endpunkte wir zu einem Punkt zusammenschlagen (dem Punkt $1 \in S^1$). Dann ist $f \colon X \to X$ gegeben durch

$$f(\theta) = \begin{cases} 2\theta & \text{wenn } \theta \in [0, \pi] \\ 4\pi - 2\theta & \text{wenn } \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Dies ist wohldefiniert und nach dem Verklebungslemma **stetig**.

Die Teilmenge $U = (0, 2\pi) \subset X$ ist gleichmässig überlagert, denn $f^{-1}(U) = (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, und eingeschränkt auf $(0, \pi)$ bzw. $(\pi, 2\pi)$ ist f ein Homöomorphismus nach U. Insbesondere haben alle $\theta \in X$ ausser $0 = 2\pi$ genau **zwei Urbilder**. Aber auch dieser Punkt hat zwei Urbilder, denn $f^{-1}(0) = \{0, \pi\}$.

Im übrigen hat 0 **eine Umgebung** U sodass $f^{-1}(U) \cong U + U$. Sei $0 < \varepsilon < \pi$. Dann können wir $U = (2\pi - \varepsilon, 2\pi] \cup [0, \varepsilon) \subset X$ verwenden. Beachte, dass U einfach zum offenen Einheitsintervall homöomorph ist, da $2\pi = 0 \in X$. Nun ist $f^{-1}(U)$ die disjunkte Vereinigung der Mengen $(\pi - \varepsilon/2, \pi + \varepsilon/2)$ und $(2\pi - \varepsilon/2, 2\pi] \cup [0, \varepsilon/2)$, die beide jeweils zu U homöomorph sind.

Was aber schiefgeht, ist: die Einschränkung von f auf $(\pi - \varepsilon/2, \pi + \varepsilon/2)$ ist kein Homöomorphismus nach U. Denn $f|_{(\pi-\varepsilon/2, \pi+\varepsilon/2)}$ hat als Bild nur $(2\pi - \varepsilon, 2\pi] \neq U$, und ist auch nicht injektiv. Das gleiche Problem tritt bei der Einschränkung von f auf $(2\pi - \varepsilon/2, 2\pi] \cup [0, \varepsilon/2)$ auf.

Da U zusammenhängend ist, und $f^{-1}(U)$ zwei Zusammenhangskomponenten hat, gibt es auch keine andere Zerlegung von $f^{-1}(U)$ in zwei Blätter. Also ist U nicht gleichmässig überlagert. Ausserdem gibt es auch keine andere gleichmässig überlagerte Umgebung U' von 0; denn jede offene Umgebung U' von 0 enthält ein U wie oben, und wäre U' gleichmässig überlagert, so auch $U \subset U'$. Es folgt, dass f **keine Überlagerung** ist.

Übung 6. Satz 17.6 aus der Vorlesung besagt: operiert eine Gruppe G frei und eigentlich diskontinuierlich auf einem Raum Y (d.h. jedes $y \in Y$ hat eine offene Umgebung U sodass für alle $g \in G$ gilt $U \cap gU = \varnothing$), und ist Y einfach zusammenhängend, so folgt $\pi_1(Y/G, x_0) \cong G$. Benutzen Sie diesen Satz, um die Fundamentalgruppen der folgenden Räume zu bestimmen:

(a) $\mathbb{R}P^2$,

(b) $T^2 = S^1 \times S^1$,

(c) $(\star)$ die Kleinsche Flasche.

Lösung für Übung 6:

(a) Man kann den Raum $\mathbb{R}P^2$ als $S^2/\mathbb{Z}/2$ schreiben, wobei $1 \in \mathbb{Z}/2$ als die antipodale Abbildung $x \mapsto -x$ operiert. Da S^2 einfach zusammenhängend ist, haben wir $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) \cong \mathbb{Z}/2$.

(b) Die Gruppe $\mathbb{Z}^2$ operiert durch Verschiebungen auf $\mathbb{R}^2$. Dann ist $T^2 \cong {}^{\mathbb{R}^2}\!/_{\mathbb{Z}^2}$. Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, haben wir $\pi_1(T^2, x_0) \cong \mathbb{Z}^2$.

(c) Sei KF die Kleinsche Flasche. Seien zwei Abbildungen

$$\tau\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x+1, y) \text{ und } \sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (1-x, y+1)$$

und $G \subset \mathrm{Aff}_2(\mathbb{R})$ die Untergruppe der affinen invertierbaren Abbildungen auf $\mathbb{R}^2$, die von σ und τ erzeugt ist. Die Abbildung σ heisst Schubspiegelung oder Gleitspiegelung (sie ist die Verknüpfung einer Spiegelung und einer Verschiebung entlang der gleichen Achse). Die Kleinsche Flasche kann man als

$$[0,1] \times [0,1]/\sim, \qquad (0,y) \sim (1,y), (x,0) \sim (1-x,1)$$

schreiben. Da $\tau(0,y) = (1,y)$ und $\sigma(x,0) = (1-x,1)$, sehen wir, dass ${}^{\mathbb{R}^2}\!/_{G} \cong KF$. Das heisst, dass $\pi_1(KF, x_0) \cong G$.

Bemerkung: Wir haben $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = \tau^{-1}$ und man kann zeigen, dass $G \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle$.

Übung 7. Ähnlich wie in Serie 9, Übung 5 betrachten wir Graphen – diesmal allerdings auch unendliche. Seien V, E diskrete Räume, und $a, b\colon E \to V$ Funktionen. Dann heisst der topologische Raum $X = (V + (E \times [0,1]))/\sim$ mit $\sim$ erzeugt von $(e,0) \sim a(e)$ und $(e,1) \sim b(e)$ ein *Graph*. Die Punkte $v \in V \subset X$ heissen *Ecken*, und die Unterräume $e \times [0,1]/\sim \subset X$ für $e \in E$ *Kanten*. Zeigen Sie, dass ein Überlagerungsraum eines Graphen wieder ein Graph ist.

Beispiel eines unendlichen Graphen

Lösung für Übung 7: Sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung und X ein Graph wie in der Übung. Wir konstruieren im folgenden E', V', a', b' für Y, um zu zeigen, dass Y ein Graph ist. Sei $V' = p^{-1}(V)$. Man prüft (unter Verwendung, dass p eine Überlagerung ist), dass $V' \subset Y$ diskret ist.

Eine Kante $\{e\} \times [0,1]/\sim \subset X$ von X ist das Bild eines Wegs $\sigma\colon [0,1] \to X$ mit $\sigma(0) = a(e)$ und $\sigma(1) = b(e)$. Für alle Hochhebungen $\widetilde{\sigma}$ betrachten wir ein e' mit $a'(e') = \widetilde{\sigma}(0)$ und $b'(e') = \widetilde{\sigma}(1)$. Sei E' die Menge aller solchen e', für alle Kanten von X. Dies definiert die Menge E' und die Funktionen a', b'.

Man prüft nun, dass der durch V', E', a', b' definierte Graph homöomorph zu Y ist.

Die folgenden Übungen benötigen Stoff aus der letzten Vorlesung von Montag, dem 26.5.

Übung 8. Sei $Z \subseteq \mathbb{C}^*$ offen und zusammenhängend, $z_0 \in Z$ und $i\colon Z \to \mathbb{C}^*$ die Inklusion. Zeigen Sie, dass sich genau dann ein stetiger Logarithmus auf Z definieren lässt, wenn $i_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq \pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)$ die triviale Gruppe ist. Hierbei sei ein Logarithmus auf Z eine Abbildung $\log\colon Z \to \mathbb{C}$, welche $e^{\log(z)} = z$ für alle $z \in Z$ erfüllt.

Lösung für Übung 8: Weil $Z \subseteq \mathbb{C}^* \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend ist, ist es auch wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Wir betrachten die Überlagerung $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*, z \mapsto e^z$, und wählen ein $\tilde{z} \in \mathbb{C}$ mit $p(\tilde{z}) = z_0$. Nach dem Hochhebbarkeitskriterium existiert nun eine stetige Abbildung $\log\colon Z \to \mathbb{C}$ mit $p \circ \log = i$ (also $e^{\log(z)} = z$ für alle $z \in Z$) und $\log(z_0) = \tilde{z}$ genau dann, wenn

$$i_*(Z, z_0) \subseteq p_*\left(\pi_1\left(\mathbb{C}, \tilde{z}\right)\right) = p_*\left(\{0\}\right) = \{0\}$$

gilt, also genau dann, wenn $i_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq \pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)$ die triviale Gruppe ist.

Übung 9. Bestimmen Sie zwei Überlagerungen $p\colon X \to T^2$ und $p'\colon X' \to T^2$ des Torus T^2, sodass $p'\colon X \to T^2$ und $p'\colon X' \to T^2$ die gleiche (endliche) Anzahl von Blättern haben, aber sodass es keine Homöomorphismen $\phi\colon X \to X'$ und $\psi\colon T^2 \to T^2$ gibt mit $p' \circ \phi = \psi \circ p$.

Lösung für Übung 9: Wir identifizieren den Torus T^2 mit $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ und betrachten die beiden Überlagerungen $p\colon T^2 \to T^2$ und $p'\colon T^2 \to T^2$ gegeben durch $p([(t,s)]) \coloneqq [(2t, 2s)]$ und $p'([(t,s)]) \coloneqq [(t, 4s)]$ für $[(t,s)] \in T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Beachten Sie, dass p und p' beide Überlagerungen vom Grad 4 über T^2 sind. Ausserdem gilt

$$p_*(\pi_1(T^2)) = (2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z}) < \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \pi_1(T^2) \quad \text{und} \quad p_*(\pi_1(T^2)) = \mathbb{Z} \times (4\mathbb{Z}) < \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \pi_1(T^2).$$

Nehmen wir nun an, dass es Homöomorphismen $\phi\colon X \to X'$ und $\psi\colon T^2 \to T^2$ gibt, so dass $p' \circ \phi = \psi \circ p$ gilt, dann ist insbesondere

$$(2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z}) = p'_*(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = p'_* \circ \phi_*(\pi_1(T^2)) = \psi_* \circ p_*(\pi_1(T^2)) = \psi_*(\mathbb{Z} \times (4\mathbb{Z})),$$

d.h. es gibt einen Isomorphismus $F = \psi_*\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $F(\mathbb{Z} \times (4\mathbb{Z})) = (2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z})$. Dies ist aber nicht möglich, denn die Quotienten $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/(\mathbb{Z} \times (4\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/((2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z})) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sind nicht isomorph.

Übung 10. ~~Sei X ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum mit endlicher Fundamentalgruppe. Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f\colon X \to S^1$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist.~~ *Diese Aufgabe ist gestrichen. Zur Lösung bräuchte man das Hochhebbarkeitskriterium (siehe z.B. Jänich S. 174 oder Hatcher Proposition 1.33. S. 61, welches wir in der Vorlesung nicht mehr betrachtet haben.*

Lösung für Übung 10: Aus der Endlichkeit der Fundamentalgruppe von X folgt, dass jedes Element $h \in \pi_1(X)$ endliche Ordnung hat. Daher hat das Element $f_*(h) \in \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ ebenfalls endliche Ordnung (weil f_* ein Homomorphismus ist), was impliziert, dass es Null ist, da es keine nichttrivialen Elemente endlicher Ordnung in $\mathbb{Z}$ gibt. Wir haben also gezeigt, dass $f_*(\pi_1(X)) = \{0\} \subseteq \pi_1(S^1)$.

Betrachten wir nun die universelle Überlagerung $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ von S^1. Wegen $f_*(\pi_1(X)) = \{0\} = p_*(\pi_1(\mathbb{R}))$ sind die Voraussetzungen des Hochhebbarkeitskriteriums erfüllt und somit existiert eine Hochhebung $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{R}$ von f. Weil $\mathbb{R}$ zusammenziehbar (kontrahierbar) ist, ist nach Aufgabe 5 (b) von Serie 6 jede Abbildung $X \to \mathbb{R}$ homotop zu einer konstanten Abbildung, also ist auch $f = p \circ \tilde{f}$ homotop zu einer konstanten Abbildung (betrachte die Verknüpfung einer Homotopie $X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit p.)

Übung 11. Beschreiben Sie bis auf Isomorphie alle Überlagerungen $p\colon Y \to X$ von X mit wegzusammenhängendem Y, wobei

(a) $X = S^1$,

(b) $X = S^1 \times S^2$,

(c) $X = S^1 \vee S^2$.

Lösung für Übung 11:

(a) Die Klassifikation der Überlagerungen gibt uns eine 1:1 Korrespondenz zwischen den Isomorphietypen der Überlagerungen von S^1 und den Untergruppen von $\pi_1(S^1,1)\cong\mathbb{Z}$. Die triviale Untergruppe entspricht der universellen Überlagerung $\mathbb{R}\to S^1, t\mapsto e^{it}$. Die nicht-trivialen Untergruppen sind alle von der Form (n) für ein $n\geqslant 1$, und entsprechen der Überlagerung $S^1\to S^1, z\mapsto z^n$.

(b) Wegen $\pi_1\left(S^2\right)\cong\{1\}$ gibt es bis auf Isomorphie nur die universelle Überlagerung $\mathrm{id}\colon S^2\to S^2$ von S^2. Die Überlagerungen von $S^1\times S^2$ sind die Produkte $\mathbb{R}\times S^2\to S^1\times S^2, (r,x)\mapsto\left(e^{2\pi ir},x\right)$ und $S^1\times S^2\to S^1\times S^2, (z,x)\mapsto(z^n,x)$ für $n\in\mathbb{N}$.

(c) Die universelle Überlagerung von $S^1\vee S^2$ ist der topologische Raum, der aus $\mathbb{R}$ entstet, indem wir an jede ganze Zahl $k\in\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}$ eine Kopie der Sphäre S^2 kleben. Die weiteren Überlagerungsräume sind bis auf Isomorphie die Quotientenräume X_n für $n\in\mathbb{N}$, wobei wir X_n jeweils bilden, indem wir an alle n-ten Einheitswurzeln in S^1 eine Kopie der Sphäre S^2 kleben.

Übung 12.

(a) $(\star)$ Finden Sie eine Überlagerung $p\colon Y\to S^1\vee S^1$, sodass $\pi_1(Y,y_0)$ unendlich erzeugt ist.

(b) $(\star)$ Finden Sie bis auf Isomorphie alle 2-blättrigen Überlagerungen von $S^1\vee S^1$.

(c) $(\star\star)$ Finden Sie bis auf Isomorphie alle 3-blättrigen Überlagerungen von $S^1\vee S^1$.

Lösung für Übung 12: (a) Siehe Hatcher, S. 58, Abbildung (11).

(b) Die 2-blättrigen Überlagerungen entsprechen genau den Untergruppen von $\pi_1(S^1\vee S^1,1)=\langle a,b\rangle$ mit Index 2. Alle solchen Untergruppen sind Normalteiler, und also Kerne einer surjektiven Abbildung $\langle a,b\rangle\to\mathbb{Z}/2$. Da a und b jeweils auf 0 oder 1 geschickt werden können, gibt es vier solcher Abbildungen, von denen drei surjektiv sind. Es gibt also genau drei solche Überlagerungen (bis auf Isomorphie). Zwei dieser Überlagerungen sind abgebildet in Hatcher, S. 58, Abbildung (1) und (2).

(c) Die Strategie aus (b) liefert vier Überlagerungen, deren entsprechende Untergruppen Normalteiler sind. Aber es gibt auch Untergruppen von Index 3, die keine Normalteiler sind. Tatsächlich ist es einfacher, alle Überlagerungen von Grad 3 (mit topologischen Mitteln) zu finden, als alle Untergruppen von Index 3 (mit algebraischen Mitteln). Man verwende, dass eine Überlagerung Y des Graphen $S^1\vee S^1$ wieder ein Graph ist. Da $S^1\vee S^1$ eine Ecke und zwei Kanten hat, hat Y drei Ecken und sechs Kanten. Man kann alle solchen Graphen auflisten, bei denen ausserdem jede Ecke inzident zu vier Kanten ist. Für jeden dieser Graphen gibt es noch verschiedene Möglichkeiten, den Basispunkt y_0 zu wählen, und eine Überlagerungsabbildung zu definieren. Insgesamt findet man 9 solche Überlagerungen, insgesamt also 13.