Serie 1

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung mehr oder weniger eine direkte Anwendung der Vorlesung ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf dem Übungsblatt!

* * *

Übung 1. Sei $X = [-1, 1]$ als Unterraum von $\mathbb{R}$ mit der Unterraumtopologie. Entscheiden Sie für jede der folgenden Mengen in X ob sie offen, abgeschlossen, beides, oder keines von beidem ist:

$$\{x \in X \mid \tfrac{1}{2} < |x| < 1\},$$
$$\{x \in X \mid \tfrac{1}{2} < |x| \leqslant 1\},$$
$$\{x \in X \mid \tfrac{1}{2} \leqslant |x| < 1\},$$
$$\{x \in X \mid \tfrac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 1\}.$$

Übung 2. Sei X eine Menge.

(a) Zeigen Sie, dass
$$\mathcal{O}_{\mathrm{cof}} \coloneqq \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ ist endlich oder } U \text{ ist die leere Menge}\}$$
eine Topologie auf X ist. Man nennt $\mathcal{O}_{\mathrm{cof}}$ die kofinite Topologie.

(b) Für welche Mengen X bildet die Menge aller endlicher Teilmengen eine Topologie?

Übung 3. Sei X eine Menge.

(a) Seien d_1 und d_2 Metriken auf X, so dass es eine reelle Zahl $a > 0$ gibt mit
$$d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y)^a$$
für alle $(x, y) \in X \times X$. Beweisen Sie, dass d_2 eine feinere Topologie als d_1 auf X induziert. Nehmen Sie jetzt zusätzlich an, dass es eine reelle Zahl $b > 0$ gibt mit
$$d_2(x, y) \leqslant d_1(x, y)^b$$
für alle $(x, y) \in X \times X$. Beweisen Sie, dass d_1 und d_2 dieselbe Topologie auf X induzieren.

(b) Sei d eine Metrik auf X. Zeigen Sie, dass
$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$
eine Metrik auf X definiert. Zeigen Sie, dass δ und d dieselben Topologien definieren. Zeigen Sie $\delta(x, y) \leqslant 1$ für alle $(x, y) \in X \times X$. (Dies demonstriert, dass man in jedem metrischen Raum die Metrik so ändern kann, dass zwei beliebige Punkte den Abstand $\leqslant 1$ haben, ohne die Topologie zu ändern.)

Übung 4. Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine Menge.

(a) Zeigen Sie, dass das Innere A° die grösste in A enthaltene offene Menge ist, d.h. A° ist offen und für jede offene Menge $B \subseteq A$ gilt $B \subseteq A^\circ$.

(b) Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ von A die kleinste abgeschlossene Menge ist, die A enthält, d.h. $\overline{A}$ ist abgeschlossen und für jede abgeschlossene Menge B mit $B \supseteq A$ gilt $B \supseteq \overline{A}$.

(c) Zeigen Sie, dass das Innere des Rands von A leer ist, d.h. $(\partial A)^\circ = \emptyset$.

Übung 5. ($\star$) Sei $\mathbb{Z}$ die Menge aller ganzen Zahlen und

$$\mathcal{B} = \{a\mathbb{Z} + b \mid a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \quad b \in \mathbb{Z}\}$$

eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis für eine Topologie $\mathcal{O}$ ist und dass alle Elemente von $\mathcal{B}$ bezüglich $\mathcal{O}$ abgeschlossen sind.

(b) Zeigen Sie

$$\mathbb{Z}\backslash\{-1, 1\} = \bigcup_{p \text{ prim}} p\mathbb{Z}.$$

(c) Folgern Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt [1,2].

Übung 6. Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Folgen reeller Zahlen. Sei $\mathcal{O}$ die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (das Produkt hat $\mathbb{N}$ viele Faktoren, und jeder Faktor ist $\mathbb{R}$).

(a) Sei

$$d((x_n), (y_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\min(|x_n - y_n|, 1)}{2^n},$$

für zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass d wohldefiniert[3] ist und eine Metrik auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.

(b) ($\star\star$) Zeigen Sie, dass die von der Metrik d induzierte Topologie gleich $\mathcal{O}$ ist[4].

(c) Beschreiben Sie eine Metrik e auf $\coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$, welche die Summentopologie der $\mathbb{N}$ Kopien von $\mathbb{R}$ induziert[5].

* * *

[1] Zeigen Sie, dass alle offenen Menge unendlich sind.

[2] Gäbe es nur endlich viele Primzahlen, könnte man zeigen, dass $\mathbb{Z}\backslash\{-1, 1\}$ abgeschlossen ist.

[3] Die Reihe ist stets kleiner als $\sum \frac{1}{2^n}$.

[4] Man kann zeigen, dass es für alle offenen Mengen U in $\mathcal{O}$ und $x \in U$ ein $r > 0$ gibt, sodass $B(x, r) \subset U$. Und *vice versa* kann man zeigen, dass jeder Ball $B(x, r)$ eine offene Menge U in $\mathcal{O}$ mit $x \in U$ enthält.

[5] Man kann $e(x, y) = 1$ setzen falls x, y in verschiedenen Kopien liegen.

Serie 2

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Sei X eine Menge und sei Y ein topologischer Raum. Sei $f\colon X \to Y$ eine beliebige Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{O}$ der Teilmengen von X der Form $U = f^{-1}(V)$ für offene Mengen $V \subseteq Y$ eine Topologie auf X ist. Diese heisst *Initialtopologie* bezüglich f.

(b) Zeigen Sie, dass $f\colon (X, \mathcal{O}) \to Y$ stetig ist.

(c) Sei X' eine Menge mit Topologie $\mathcal{O}'$. Angenommen, alle Funktionen $f\colon X' \to Y'$ für alle topologischen Räume Y' sind stetig. Was können Sie über $\mathcal{O}'$ sagen?

(d) Sei X' eine Menge mit Topologie $\mathcal{O}'$. Angenommen, alle Funktionen $f\colon Y' \to X'$ für alle topologischen Räume Y' sind stetig. Was können Sie über $\mathcal{O}'$ sagen?

Übung 2. Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass es für jede Menge von Teilmengen $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ genau eine Topologie $\mathcal{O}_S$ auf X gibt, sodass S eine Subbasis von $\mathcal{O}_S$ ist. Zeigen Sie weiter, dass dies die kleinste (auch gröbste genannt) Topologie von X ist, die S enthält, d.h. ist $\mathcal{O}$ eine Topologie von X mit $S \subseteq \mathcal{O}$, dann gilt $\mathcal{O}_S \subseteq \mathcal{O}$.

Übung 3.

(a) ($\star$) Entscheiden Sie, welche der folgenden topologischen Räume homöomorph zueinander sind[1]:

$$\mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^2, \quad (0,1), \quad [0,1), \quad [0,1], \quad S^1.$$

(b) ($\star\star\star$) Sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}^2$ homöomorph?

Übung 4. Seien X die reellen Zahlen mit der natürlichen Topologie (der von der euklidischen Metrik induzierten), und Y die reellen Zahlen mit der von allen Intervallen der Form $[a, b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ erzeugten Topologie.

(a) Zeigen Sie, dass die Topologie von Y feiner als die Topologie von X ist.

(b) Man beschreibe die stetigen Funktionen $f\colon Y \to X$.[2]

Übung 5. In dieser Übung vergleichen wir Zusammenhang und Wegzusammenhang.

(a) Zeigen Sie, dass ein wegzusammenhängender Raum X auch zusammenhängend ist.

(b) ($\star$) Zeigen Sie, dass ein zusammenhängender topologischer Raum X, in dem jeder Punkt eine wegzusammenhängende offene Umgebung hat, auch wegzusammenhängend ist[3].

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ mit der kofiniten Topologie zusammenhängend ist. (Die kofinite Topologie ist in Serie 1 definiert.)

(d) ($\star\star$) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ mit der kofiniten Topologie nicht wegzusammenhängend ist[3].

Übung 6. Die Mengen $\Pi_{i \in I} U_i$ mit $U_i \subset X_i$ offen für alle $i \in I$ bilden eine Basis für eine Topologie auf $\Pi_{i \in I} X_i$, die sogenannte *Box-Topologie*. Betrachten wir $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit dieser Topologie. Zeigen Sie, dass die Menge aller Folgen, die gegen 0 konvergieren, eine offene und abgeschlossene Menge ist. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie und $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit der Boxtopologie nicht homöomorph sind.

* * *

[1] Was passiert, wenn man aus diesen Räumen einen Punkt löscht?
[2] Es sind die rechtsstetigen Funktionen – warum?
[3] Betrachten Sie für alle $x \in X$ die Menge $S(x)$ aller Punkte, zu denen es einen Weg von x gibt.
[4] Zeigen Sie: $[0,1]$ ist nicht die Vereinigung von mehr als zweien, aber nur abzählbar vielen disjunkten abgeschlossenen Mengen.

Serie 3

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Zeigen Sie, dass eine konvergente Folge in einem Hausdorffraum nur einen Häufungspunkt hat. Ein Punkt ist ein *Häufungspunkt* einer Folge, falls jede Umgebung des Punktes unendlich viele Folgenglieder enthält. Folgern Sie, dass in einem Hausdorffraum der Grenzwert einer Folge, sofern er existiert, eindeutig ist.

Übung 2. Wie in Serie 2, Übung 4, seien X die reellen Zahlen mit der natürlichen Topologie, und Y die reellen Zahlen mit der von Intervallen der Form $[a, b)$ mit $a < b$ erzeugten Topologie.

(a) Man zeige, dass Y *total unzusammenhängend* ist (d.h. dass Einpunktmengen die einzigen zusammenhängenden Teilmengen von Y sind).

(b) Man beschreibe die stetigen Abbildung $X \to Y$.

Übung 3. Wie in Serie 1, Übung 2, sei $(X, \mathcal{O}_{\text{cof}})$ ein topologischer Raum mit der kofiniten Topologie.

(a) Zeigen Sie, dass X das Axiom T_1 erfüllt, d.h. für zwei verschiedene Punkte $a \neq b$ in X existieren offene Umgebungen von a und b, welche den jeweils anderen Punkt nicht enthalten.

(b) Wann ist X ein Hausdorffraum?

(c) Zeigen Sie, dass ein beliebiger topologischer Raum X genau dann das Axiom T_1 erfüllt, wenn alle einelementigen Teilmengen von X abgeschlossen sind.

Übung 4. Sei X eine Menge.

(a) Was sind die kompakten Mengen in X mit der diskreten Topologie?

(b) Was sind die kompakten Mengen in X mit der kofiniten Topologie?

Übung 5. (Wegzusammenhangskomponenten) Sei X ein topologischer Raum und sei $x_0 \in X$.

(a) Die Menge

$$\{x \in X \mid \text{ es gibt einen Weg von } x \text{ nach } x_0\}$$

heisst *Wegzusammenhangskomponente* von x_0 (in der Vorlesung haben Sie die Zusammenhangskomponenten gesehen). Zeigen Sie, dass dies die grösste wegzusammenhängende Teilmenge von X ist, welche x_0 enthält.

(b) Was sind die Zusammenhangskomponenten und Wegzusammenhangskomponenten in $\mathbb{Q}$?

(c) Finden Sie ein Beispiel eines topologischen Raums mit einer Wegzusammenhangskomponente, die nicht abgeschlossen ist.

Übung 6.

(a) Zeigen Sie, dass das Produkt zweier nicht-leerer topologischer Räume X, Y genau dann kompakt ist, wenn X und Y kompakt sind.

(b) Zeigen Sie, dass das Produkt zweier topologischer Räume X, Y genau dann zusammenhängend ist, wenn X und Y zusammenhängend sind.

Seien $(X_i)_{i \in I}$ topologische Räume.

(c) Zeigen Sie, dass $\Pi_{i \in I} X_i$ genau dann wegzusammenhängend ist, wenn X_i wegzusammenhängend für alle $i \in I$ ist.

(d) ($\star\star$) Zeigen Sie, dass $\Pi_{i \in I} X_i$ genau dann zusammenhängend ist, wenn X_i zusammenhängend für alle $i \in I$ ist.

Übung 7. Die *Cantor-Menge* $C \subseteq \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert. Sei

$$C_1 := [0, 1] \quad \text{und} \quad C_n := \frac{1}{3} C_{n-1} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} C_{n-1} \right).$$

Nachfolgend sind C_1 bis C_7 abgebildet.

Dann ist die Cantor-Menge definiert durch

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge kompakt ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge überabzählbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponenten von C jeweils nur aus einem Punkt bestehen (d.h. C ist *total unzusammenhängend*), aber C keine isolierten Punkte hat. Hier heisst ein Punkt x eines topologischen Raums *isoliert*, falls $\{x\}$ offen ist.

(d) ($\star\star\star$) Zeigen Sie, dass jeder nicht-leere, total unzusammenhängende, metrisierbare, kompakte topologische Raum X ohne isolierte Punkte homöomorph zu C ist. Zum Aufwärmen kann man z.B. zeigen, dass C zu $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ homöomorph ist, wobei $\{0, 1\}$ die diskrete Topologie trägt.

* * *

Serie 4

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Seien X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi\colon X \to X/\sim$, $x \mapsto [x]$. Zeigen Sie:

(a) Die Quotiententopologie
$$\mathcal{O}_{X/\sim} := \{U \subseteq X/\sim \mid \pi^{-1}(U) \text{ ist offen in } X\}$$
ist eine Topologie auf $X/\sim$.

(b) Die Abbildung π ist stetig.

(c) $\mathcal{O}_{X/\sim}$ ist die grösste (auch *feinste* genannt) Topologie auf $X/\sim$, sodass π stetig ist, d.h. falls $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $X/\sim$ ist, sodass π stetig ist, dann gilt $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{X/\sim}$.

(d) Für einen topologischen Raum Y ist eine Funktion $f\colon X/\sim \to Y$ genau dann stetig, falls die Verknüpfung $f \circ \pi\colon X \to Y$ stetig ist.

Übung 2. Für $n \in \mathbb{N}$, sei $\mathbb{D}^n = \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| \leqslant 1\}$ mit der Euklidischen Topologie ausgestattet. Wir betrachten die Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben durch
$$v \sim w \Leftrightarrow v = w \text{ oder } |v| = |w| = 1.$$
Finden Sie einen zu $\mathbb{D}^n/\sim$ homöomorphen Teilraum eines $\mathbb{R}^m$.

Übung 3. (Der Torus) Zeigen Sie, dass der topologische Produktraum $X_1 = S^1 \times S^1$ homöomorph zum Quotientenraum $X_2 = Q/\sim$ ist, den man erhält, wenn man auf $Q = [0,1] \times [0,1]$ die Äquivalenzrelation $(s,0) \sim (s,1)$ für alle $s \in [0,1]$ und $(0,t) \sim (1,t)$ für alle $t \in [0,1]$ betrachtet. Dies sind zwei mögliche (äquivalente) Definitionen des Torus T^2.

Übung 4. (Der reelle projektive Raum) Zeigen Sie, dass die unten definierten topologischen Räume X_1, X_2 und X_3 homöomorph sind. Dies sind drei mögliche (äquivalente) Definitionen des projektiven Raums $\mathbb{RP}^2$.

(a) Sei $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ die zweidimensionale Einheitssphäre. Wir betrachten auf S^2 die Äquivalenzrelation $\sim$, welche die Antipoden auf S^2 identifiziert, d.h. $u \sim v$ wenn $u = v$ oder $u = -v$. Dann ist der topologische Raum X_1 definiert als der Quotientenraum $X_1 := S^2/\sim$.

(b) Wir betrachten die zweidimensionale Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ und die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{D}^2$, welche die Antipoden auf ihrem Rand identifiziert, d.h. $u \sim v$ wenn $u = v$ oder $u = -v$ für $u, v \in \partial\mathbb{D}^2$. Der topologische Raum X_2 ist dann der Quotientenraum $X_2 := \mathbb{D}^2/\sim$.

(c) Sei $\mathcal{L}$ die Menge der Geraden in $\mathbb{R}^3$, die durch den Ursprung gehen. Für $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ sei $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ der Winkel zwischen L_1 und L_2 und wir definieren $d(L_1, L_2) := \alpha$. Dann definieren wir den topologischen Raum X_3 als $\mathcal{L}$ mit der durch d induzierten Topologie.

Übung 5. Sei X ein topologischer Raum und sei $\Delta := \{(x,y) \in X \times X \mid x = y\}$ die Diagonale von $X \times X$.

(a) Zeigen Sie, dass X genau dann ein Hausdorffraum ist, wenn Δ in $X \times X$ abgeschlossen ist.

(b) Sei $\sim$ eine beliebige Äquivalenzrelation auf X und definiere $R := \{(x,y) \in X \times X \mid x \sim y\}$. Angenommen, $\pi\colon X \to X/\sim$ ist *offen*, d.h. das Bild $\pi(U)$ einer jeden offenen Menge $U \subseteq X$ ist offen in $X/\sim$. Zeigen Sie, dass $X/\sim$ genau dann ein Hausdorffraum ist, wenn R in $X \times X$ abgeschlossen ist.

Übung 6. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und sei ∞ ein abstraktes Symbol, welches nicht in X enthalten ist. Wir definieren die *Einpunktkompaktifizierung* (auch *Alexandroff-Kompaktifizierung* genannt) $\widehat{X}$ von X als die Menge $X \cup \{\infty\}$ mit der Topologie

$$\mathcal{O}_{\widehat{X}} \coloneqq \mathcal{O}_X \cup \{\{\infty\} \cup (X \setminus K) \mid K \subseteq X \text{ kompakt und abgeschlossen}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\widehat{X}$ ein kompakter topologischer Raum ist.

(b) Finden Sie für die Einpunktkompaktifizierung $\widehat{X}$ folgender topologischer Räume einen Teilraum eines $\mathbb{R}^m$, zu dem sie homöomorph sind:

  (i) $X = [0, 1)$
  (ii) $X = (0, 1)$
  (iii) $X = [0, 1]$
  (iv) $X = \mathbb{R}^n$.

* * *

Serie 5

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn eine Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf dem Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Sei X ein topologischer Raum und CX der Kegel über X. Zeigen Sie, dass CX wegzusammenhängend ist.

Übung 2. Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ den Kegel CS^n und die Suspension ΣS^n bis auf Homöomorphie.

Übung 3.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi \colon S^{n-1} \subseteq \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$, $x \mapsto x$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{D}^n \cup_\varphi \mathbb{D}^n$ homöomorph zu S^n ist.

(b) Sei X ein topologischer Raum und CX der Kegel über X. In welchem Sinne kann man CX mit CX verkleben, sodass man ΣX bekommt?

Übung 4. Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G, versehen mit einer Topologie, bezüglich der die Abbildungen

$$G \times G \to G,\ (g, g') \mapsto gg' \text{ und } G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$$

stetig sind. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für jedes $g_0 \in G$ sind die *Rechtstranslation* $R_{g_0} \colon G \to G,\ g \mapsto gg_0$ und die *Linkstranslation* $L_{g_0} \colon G \to G,\ g \mapsto g_0 g$ Homöomorphismen.

(b) Die Stetigkeit der genannten Abbildungen ist äquivalent zu der Stetigkeit der *einen* Abbildung $G \times G \to G$, $(g, g') \mapsto g^{-1}g'$.

(c) Sei $GL_n(\mathbb{R})$ mit der Topologie versehen, die von der Inklusion $GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ kommt. Zeigen Sie, dass $GL_n(\mathbb{R})$ eine topologische Gruppe ist.

(d) Die Topologie auf G ist schon eindeutig bestimmt durch eine Umgebungsbasis des Einselementes e. Hier ist eine *Umgebungsbasis* von e eine Familie von Umgebungen von e, sodass jede Umgebung von e eine Menge aus der Familie enthält.

(e) Ein Homomorphismus von topologischem Gruppen ist stetig dann und nur dann, wenn er beim Einselement stetig ist. Hier ist eine Funktion *stetig bei* e, wenn das Urbild jeder Umgebung des Bildes von e eine Umgebung von e ist.

(f) $(\star)$ Jede offene Untergruppe $H \subset G$ ist abgeschlossen.

(g) Ist $H \subset G$ eine normale Untergruppe, so ist die Quotientengruppe ${}^{G}\!/_{H}$ mit der Quotiententopologie wieder eine topologische Gruppe.

Übung 5. Sei X ein Hausdorffraum und K eine kompakte Teilmenge von X. Zeigen Sie:

(a) Der Quotientenraum X/K ist ein Hausdorffraum.

(b) Sei $A \subsetneq K$ eine offene Teilmenge von X. Dann ist die durch $f([x]_A) = [x]$ definierte Abbildung

$$f \colon (X \setminus A)/(K \setminus A) \to X/K$$

wohldefiniert und ein Homöomorphismus. Hierbei bezeichnen $[x]_A$ und $[x]$ die Äquivalenzklassen in $(X \setminus A)/(K \setminus A)$ bzw. X/K.

(c) Die Aussage aus (b) stimmt nicht, wenn $A = K$ ist.

(d) Angenommen, X ist kompakt. Dann ist X/K die Einpunktkompaktifizierung von $X \setminus K$. Die Einpunktkompaktifizierung wurde auf Serie 4 definiert.

Übung 6. In dieser Übung zeigen wir in zwei Schritten, dass für alle Familien kompakter topologischer Räume $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ das Produkt

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

wiederum kompakt ist (in Serie 3, Übung 6 hatten Sie dies für endliche Produkte gezeigt).

(a) ($\star\star$) Zeigen Sie, dass jede Überdeckung des Produktes durch Zylinder eine endliche Teilüberdeckung hat[1].

(b) ($\star\star$) Sei X ein beliebiger topologischer Raum mit Subbasis $\mathcal{B}$. Angenommen, für alle Überdeckungen $\mathcal{V} = \{B_a\}_{a \in A}$ von X mit Elementen B_a von $\mathcal{B}$ (d.h. also $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$) gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(B_{a_1}, \dots B_{a_n})$ von X. Zeigen Sie, dass X dann kompakt ist[2].

* * *

[1] Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung mit Elemente in $\mathcal{B}$. Für alle $\alpha \in A$ sei $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{U}$ die Teilmenge der Elemente $\pi^{-1}(U)$ mit $U \subset X_\alpha$. Zeigen Sie, dass es $\alpha \in A$ $\mathcal{U}_\alpha$ eine Überdeckung von $\prod_\alpha X_\alpha$ existiert.

[2] Zeigen Sie zuerst, dass es eine maximale offene Überdeckung $\mathcal{C}$ ohne endliche Teilüberdeckung gibt (maximal bedeutet: $\mathcal{C} \cup \{U\}$ für eine beliebige offene Menge $U \notin \mathcal{C}$ hat eine endliche Teilüberdeckung).

Serie 6

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1.

Lemma 1 (Verklebungslemma)**.** *Seien X und Y topologische Räume und sei $X = A \cup B$ eine Überdeckung von X mit abgeschlossenen Mengen $A, B \subseteq X$. Weiter seien $f\colon A \to Y$ und $g\colon B \to Y$ stetige Abbildungen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A \cap B$ und sei $h\colon X \to Y$ definiert durch*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \textit{falls } x \in A, \\ g(x), & \textit{falls } x \in B. \end{cases}$$

Dann h ist eine wohldefinierte stetige Abbildung.

Bemerkung 1. *Diese Aussage lässt sich verallgemeinern für eine Überdeckung von X mit endlich vielen abgeschlossenen Mengen, aber auch für eine beliebige Überdeckung von X mit offenen Mengen.*

(a) Zeigen Sie das Verklebungslemma.

(b) Sei X ein topologischer Raum und seien γ_0 und γ_1 zwei Wege in X mit $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$. Zeigen Sie, dass dann der Weg $\gamma_0\gamma_1$ stetig ist.

(c) Sei X ein topologischer Raum und seien $x, y, z \in X$. Seien γ_0 und γ_0' zwei Wege in X von x nach y und γ_1 und γ_1' zwei Wege in X von y nach z. Zeigen Sie, dass falls $\gamma_0 \simeq \gamma_0'$ und $\gamma_1 \simeq \gamma_1'$ rel Endpunkte gilt, so gilt auch $\gamma_0\gamma_1 \simeq \gamma_0'\gamma_1'$ rel Endpunkte.

Übung 2. Zeigen Sie, dass $\{5\} \subset \mathbb{Q}$ ein Retrakt von $\mathbb{Q}$ ist, aber kein Deformationsretrakt.

Übung 3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $\mathrm{id}_{S^n}, p\colon S^n \to S^n$ die stetigen Abbildungen gegeben durch $\mathrm{id}_{S^n}(v) = v$ und $p(v) = -v$.

(a) Zeigen Sie für $n = 1$, dass p homotop zu id_{S^n} ist.

(b) Zeigen Sie für alle ungeraden n, dass p homotop zu id_{S^n} ist.

Übung 4. Zeigen Sie, dass das Möbiusband homotopieäquivalent zum Zylinder $S^1 \times [0, 1]$ ist.

Übung 5. Seien X und Y homotopieäquivalente Räume.

(a) Zeigen Sie, dass X genau dann wegzusammenhängend ist, wenn Y wegzusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn Y zusammenhängend ist.

(c) ($\star$) Sei $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Bezeichne $[z]_Z$ und $[z]_W$ die Zusammenhangs- bzw. die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes z in X oder Y. Zeigen Sie, dass $[z]_Z \mapsto [f(z)]_Z$ und $[z]_W \mapsto [f(z)]_W$ Bijektionen zwischen den Zusammenhangskomponenten bzw. den Wegzusammenhangskomponenten von X und Y definieren.

Übung 6. ($\star$) Zeigen Sie, dass $O_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ ein Deformationsretrakt ist. Die topologische Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$ ist in Serie 5, Übung 4 definiert[1].

Übung 7. (Koprodukt in der Kategorientheorie) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Seien A und B zwei Objekte von $\mathcal{C}$. Ein *Koprodukt* C von A und B ist ein Objekt von $\mathcal{C}$ mit zwei Morphismen $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, C)$ und $\beta \in \mathrm{Hom}(B, C)$, sodass folgendes gilt: Für alle Objekte D von $\mathcal{C}$ und Morphismen $\alpha' \in \mathrm{Hom}(A, D)$ und $\beta' \in \mathrm{Hom}(B, D)$ **gibt** es einen **eindeutigen** Morphismus $\gamma \in \mathrm{Hom}(C, D)$ mit $\alpha' = \gamma \circ \alpha$ und $\beta' = \gamma \circ \beta$.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\alpha'"] & \\
C \arrow[rr, dashed, "\exists! \gamma"] & & D \\
 & B \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "\beta'"'] &
\end{tikzcd}$$

(a) Zeigen Sie, dass das Koprodukt, sofern es existiert, eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus ist.

(b) Bestimmen Sie das Koprodukt von zwei Objekten A und B in den folgenden Kategorien.

- (i) $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$.
- (ii) $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$.
- (iii) $\mathcal{C} = \mathbf{Vek}_{\mathbb{R}}$ (Objekte: alle $\mathbb{R}$-Vektorräume, Morphismen: $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen).
- (iv) $\mathcal{C}$ die Kategorien aller topologischen Räumen mit Basispunkt, und Morphismen den basispunkterhaltenden stetigen Abbildungen.
- (v) $\mathcal{C}$ ist deine Lieblingskategorie.
- (vi) Können Sie eine Kategorie finden, die keine Koprodukte hat?

[1] Benutzen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren.

Serie 7

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Seien X, Y topologische Räume. Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Sei $x_0 \in X$ beliebig und $y_0 \in Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Beweisen Sie die Funktorialität der Fundamentalgruppe, also folgende Aussagen.

(a) $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $[\sigma] \mapsto [f \circ \sigma]$ definiert einen Gruppenhomomorphismus.

(b) $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

(c) Sei Z ein topologischer Raum, $g\colon Y \to Z$ stetig und $z_0 \in Z$ mit $z_0 = g(y_0) = g(f(x_0))$. Dann gilt $(g\circ f)_* = g_* \circ f_*$, wobei $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $g_*\colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Z, z_0)$ und $(g \circ f)_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, z_0)$.

Übung 2. Sei $A \subseteq X$ ein Retrakt mit Retraktion $\rho\colon X \to A$ und bezeichne $i\colon A \to X$ die Inklusion. Sei $a \in A \subseteq X$.

(a) Zeigen Sie, dass $i_*\colon \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ injektiv ist und $\rho_*\colon \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$ surjektiv ist.

(b) Sei ρ nun eine Deformationsretraktion. Nehmen Sie zusätzlich an, dass die Homotopie $H\colon X \times [0, 1] \to X$ von $H_0 = i \circ \rho$ nach $H_1 = \mathrm{id}_X$ relativ A ist (d.h. für alle $t \in [0, 1], x \in A$ gilt $H_t(x) = x$). Zeigen Sie, dass dann i_* und ρ_* zueinder inverse Gruppenisomorphismen sind.

(c) ($\star$) Sei ρ eine Deformationsretraktion. Zeigen Sie, dass auch ohne die zusätzliche Annahme in (b) folgt, dass i_* und ρ_* zueinder inverse Gruppenisomorphismen sind.

Eine Deformationsretraktion mit der Zusatzannahme aus (b) wird oft „starke" Deformationsretraktion genannt (z.B. von Jänich). In anderen Quellen (z.B. Hatcher) ist die Zusatzannahme Bestandteil der Definition einer Deformationsretraktion.

Übung 3.

(a) Seien X und Y topologische Räume und $x_0 \in X, y_0 \in Y$. Finden Sie einen (kanonischen) Gruppenisomorphismus zwischen $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ und $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

(b) Sei $X = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in X$ beliebig. Bestimmen Sie den Isomorphietyp von $\pi_1(X, x_0)$.
Hinweis: Sie dürfen hier benutzen, dass für $n = 1$, $\pi_1(X, x_0)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist. Diese Aussage wird in der Vorlesung noch gezeigt.

Übung 4. Sei $\mathcal{E}$ die Kategorie mit Objekten den Euklidischen Räumen $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ und Morphismen $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ den glatten Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$, die den Ursprung auf den Ursprung senden, mit der üblichen Verknüpfung von Funktionen. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $\mathcal{F}$, die jedem $\mathbb{R}^n$ sich selbst und jedem $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ das Differential $Df(0)$ von f im Ursprung zuordnet, einen kovarianten Funktor von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{E}$ definiert.

Übung 5. Sei $\mathcal{U}$ gegeben durch folgendes Tripel von Daten:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ ist die Klasse der kleinen Kategorien, d.h.
$$\mathrm{Ob}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ ist eine Kategorie, für welche } \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \text{ eine Menge ist}\},$$
- $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ist die Menge der kovarianten Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$,
- $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ ist durch Nacheinanderausführen von Funktoren gegeben.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}$ eine Kategorie bildet.

Übung 6. ($\star\star\star$) Finden Sie eine stetige Surjektion $S^1 \to S^2$. Können Sie für alle $m, n \in \mathbb{N}$ eine stetige Surjektion $S^m \to S^n$ finden?

Serie 8

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Zeigen Sie, dass es keinen Homöomorphismus $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus S^1$ mit $f(0,0) = (2,0)$ gibt.

Übung 2. Seien X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$.

(a) Sei β eine Schleife an x_0. Beschreiben Sie die Abbildung

$$\psi_\beta\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_0), \quad [\alpha] \mapsto [(\beta^{-1}\alpha)\beta],$$

(vgl. Proposition 12.1 aus der Vorlesung vom 11. April) mit Begriffen aus der Gruppentheorie.

(b) Sei Y ein topologischer Raum, $y_0 \in Y$ und seien $f, g\colon X \to Y$ homotope Abbildungen mit $f(x_0) = g(x_0) = y_0$. Was können Sie über $f_*, g_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$ aussagen?

Übung 3. ($\star$) Sei $r > 0$ eine Konstante. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung, sodass $|f(v) - v| \leqslant r$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt. Zeigen Sie, dass f surjektiv ist.

Übung 4. Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X einfach zusammenhängend ist genau dann, wenn es für alle Paare von Punkten x, y in X eine eindeutige Homotopieklasse (rel Endpunkte) von Pfaden gibt, die diese beiden Punkte verbindet.

Übung 5. ($\star$) Sei $(G,\cdot)$ eine topologische Gruppe mit neutralem Element e. Zeigen Sie, dass $\pi_1(G,e)$ kommutativ ist[1].

Übung 6. Sei X ein kontrahierbarer topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X einfach zusammenhängend ist. Dies folgt direkt aus der Invarianz der Fundamentalgruppe unter Homotopieäquivalenzen, kann aber in diesem Spezialfall auch direkt gezeigt werden.

Übung 7. Ein **Gruppoid** ist eine kleine Kategorie, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist. (Zur Erinnerung: eine Kategorie ist *klein*, wenn ihre Objekte eine Menge bilden, vgl. Serie 7, Übung 5).

(a) Prüfen Sie, dass für alle Gruppoide G und alle Objekte $X \in \mathrm{Ob}(G)$ die Morphismenmenge $G(X,X)$ eine Gruppe bildet. Finden Sie eine 1:1 Korrespondenz zwischen Gruppen und Gruppoiden mit nur einem Objekt.

(b) Seien G ein Gruppoid und $X, Y \in \mathrm{Ob}(G)$, so dass ein $f \in G(X,Y)$ existiert. Zeigen Sie, dass $G(X,X)$ und $G(Y,Y)$ isomorphe Gruppen sind.

(c) Sei X ein topologischer Raum. Wir definieren die Kategorie $\Pi_1(X)$, die als Objekte genau die Punkte in X hat (also $\mathrm{Ob}(\Pi_1(X)) = X$), und als Morphismenmenge $\Pi_1(x_0,x_1)$ die Wege von x_0 nach x_1 bis auf Homotopie rel. Endpunkte. Zeigen Sie, dass $\Pi_1(X)$ ein Gruppoid ist (das sogenannte *Fundamentalgruppoid*).

(d) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \Pi_1\colon \textbf{Top} &\to \text{Kategorie der Gruppoide} \\ X &\mapsto \Pi_1(X). \end{aligned}$$

ein Funktor ist. (Die Kategorie der Gruppoide ist ähnlich wie in Serie 7, Übung 5 definiert).

(e) Wie können Sie $\pi_1(X,x_0)$ mit Hilfe von $\Pi_1(X)$ beschreiben?

Rätsel: Gegeben sei ein Bilderrahmen und ein Faden, der an seinen Enden am Bilderrahmen befestigt ist. In der Wand seien zwei Nägel eingeschlagen. Können Sie den Bilderahmen so an den zwei Nägeln aufhängen, dass er sicher herunterfällt, sobald Sie einen der beiden Nägel aus der Wand ziehen?

[1] Schreiben Sie die Verkettung $\alpha\beta$ zweier Schleifen α, β als die punktweise Multiplikation (=Gruppenoperation) zweier gut gewählter Schleifen.

Serie 9

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. ($\star$) In Serie 8, Übung 2 haben wir gesehen, dass für X, Y zwei topologische Räume, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ und $f, g\colon X \to Y$ zwei homotope Abbildungen mit $f(x_0) = g(x_0) = y_0$ ein Weg β mit $f_* = \psi_\beta \circ g_*$ existiert. Finden Sie Abbildungen f, g wie in Serie 8, Übung 2 (b), sodass $f_* \neq g_*$ gilt[1].

Übung 2. Seien H und K Gruppen.

(a) Zeigen Sie: Falls alle Elemente von $H \setminus \{1\}$ und $K \setminus \{1\}$ unendliche Ordnung haben, dann haben auch alle Elemente von $(H * K) \setminus \{1\}$ unendliche Ordnung. Schliessen Sie daraus, dass $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ nicht isomorph zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ ist.

(b) Gibt es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von $H * K$ nach $H \times K$?

Übung 3. Sei $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ wie in der Vorlesung die freie Gruppe mit Erzeugern $a_1, \dots, a_n$, d.h. das freie Produkt von n Kopien von $\mathbb{Z}$, wobei a_i die 1 in der i-ten Kopie bezeichnet. Sind $r_1, \dots, r_k \in G$, so schreiben wir

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$$

für die Faktorgruppe G/N, wobei N der Normalteiler von G ist, der von allen Konjugierten der $r_1, \dots, r_k$ erzeugt ist. Zeigen Sie, dass die folgenden Gruppen jeweils isomorph sind.

(a) $\langle x, y \mid x^6, x^{15}, xyx^{-1}y^{-1} \rangle \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}$.

(b) $\langle x, y \mid x^2, y^3 \rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

(c) $\langle x, y \mid x^2y^3, x^3y^4 \rangle \cong \{1\}$.

(d) $\langle x, y \mid x^2y^{-3} \rangle \cong \langle a, b \mid abab^{-1}a^{-1}b^{-1} \rangle$.

Übung 4. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe des projektiven Raums $\mathbb{RP}^2$ (vgl. Übung 4 von Serie 4).

Übung 5. (Fundamentalgruppe von Graphen.) ($\star$) Sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph. Das heisst, dass V eine endliche Menge ist (die Menge der sogenannten Ecken) und $E \subseteq V \times V$ (die Menge der sogenannten Kanten). Wir ordnen G folgenden topologischen Raum X zu: versehe V und E mit der diskreten Topologie, und setze $X = (V + (E \times [0,1]))/\sim$, wobei $\sim$ erzeugt ist durch $v_i \sim ((v_0, v_1), i)$ für alle $(v_0, v_1) \in E$ und $i \in \{0, 1\}$. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von X.

Übung 6. ($\star$) Sei X ein topologischer Raum, $k \geqslant 1$, und $\varphi\colon S^{k-1} \to X$ stetig. Wir sagen, $X \cup_\varphi D^k$ entsteht aus X durch *Anheften einer* k*-Zelle*. Hier ist $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \leqslant 1\}$. (Siehe Kap. 8, S. 23 in den Aufschriften für die Definition einer Anheftung $\cup_\varphi$).

(a) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von $X \cup_\varphi D^k$ für $k = 2$.

(b) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von $X \cup_\varphi D^k$ für $k \geqslant 3$.

(c) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Konstruieren Sie einen topologischen Raum X mit

$$\pi_1(X, x_0) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

[1] Die Homotopie H zwischen f und g muss y_0 bewegen.

Serie 10

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Benutzen Sie den Satz von Seifert und van Kampen, um die folgenden Fundamentalgruppen zu bestimmen:

(a) $\pi_1(T^2, x_0)$, wobei T^2 den Torus bezeichnet,

(b) $\pi_1(K, x_0)$, wobei K die Kleinsche Flasche bezeichnet.

Übung 2. Sei $g \geqslant 2$. Wir definieren die *geschlossene, orientierbare Fläche* Σ_g *vom Geschlecht* g als Quotientenraum eines Polygons wie folgt. Sei P_{4g} ein (regelmäßiges) $4g$-seitiges Polygon, dessen Seiten im Uhrzeigersinn mit 0 bis $4g-1$ nummeriert seien. Dann ist Σ_g die Fläche, die man aus P_{4g} erhält, indem man für alle $S = 0, 4, 8, \dots, 4(g-1)$ und für alle $S = 1, 5, 9, \dots, 4(g-1)+1$ die im Uhrzeigersinn parametrisierte Seite S mit der im Gegenuhrzeigersinn parametrisierten Seite $S+2$ identifiziert.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Seifert und van Kampen die Fundamentalgruppe $\pi_1(\Sigma_g)$.

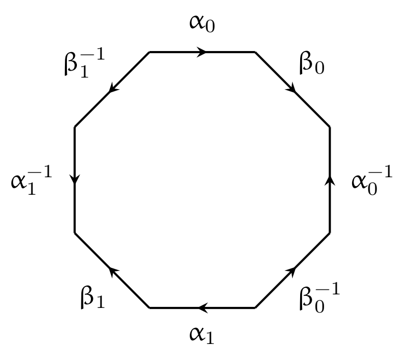


Abbildung 1: Beispiel für die Konstruktion von Σ_g durch Identifikation der Seiten eines $4g$-seitigen Polygons im Fall $g = 2$.

Übung 3. ($\star$)

(a) Seien (X_1, x_1) und (X_2, x_2) zwei punktierte topologische Räume, die kontrahierbare offene Umgebungen $U_i \subseteq X_i$ von x_i besitzen für $i = 1, 2$. Finden Sie einen natürlichen Isomorphismus

$$\pi_1(X_1, x_1) * \pi_1(X_2, x_2) \cong \pi_1(X_1 \vee X_2, x_1 = x_2).$$

(b) Sei wie in der Vorlesung

$$H \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - \tfrac{1}{n})^2 + x_2^2 = \tfrac{1}{n^2}\right\}$$

der Hawaiianische Ohrring. Zeigen Sie, dass die natürliche Abbildung wie in (a)

$$\pi_1(H, 0) * \pi_1(H, 0) \to \pi_1(H \vee H, 0 = 0)$$

kein Isomorphismus ist.

Übung 4. Sei X die Menge aller Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Man betrachte die folgenden Topologien auf X: Produkttopologie; diskrete Topologie; indiskrete Topologie; von

$$B_{\varepsilon,f} = \{g \in X \mid \forall x \in \mathbb{R} : |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}$$

für alle $\varepsilon > 0, f \in X$ erzeugte Topologie; von

$$C_{\varepsilon,f,a,b} = \{g \in X \mid \forall x \in [a,b] : |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}$$

für alle $\varepsilon > 0, f \in X$ und $a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b$ erzeugte Topologie.

(a) Ordnen Sie dies Topologien nach Feinheit.

(b) Für jede dieser Topologien beschreibe man, was es für eine Folge $f_1, f_2, \ldots \in X$ bedeutet, gegen $g \in X$ zu konvergieren.

Übung 5. $(\star)$ Wir betrachten $\{0,1\}$ mit der diskreten Topologie. Wir haben in Serie 5, Übung 6 gesehen, dass

$$X := \{0,1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$$

(also der Raum aller Funktionen von der Potenzmenge der natürlichen Zahlen nach $\{0,1\}$, mit der Produkttopologie) kompakt ist, weil $\{0,1\}$ kompakt ist. Zeigen Sie jedoch, dass es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X ohne konvergente Teilfolgen gibt.

Übung 6. $(\star\star)$ Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ ein Homöomorphismus $f\colon [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ mit $f(x) = y$ existiert, d.h. scheinbare „Randpunkte" wie z.B. die „Ecke" $\{0\}_{n\in\mathbb{N}}$ unterscheiden sich nicht qualitativ von „inneren Punkten" wie $\{\frac{1}{2}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Serie 11

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Welche der Funktionenräume von Serie 10, Aufgabe 4 sind metrisierbar? In welcher dieser Funktionenräume ist die Menge der stetigen Funktionen abgeschlossen?

Übung 2.

(a) Ein topologischer Raum X heißt *separabel*, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält (d.h. es existiert eine abzählbare Teilmenge $A \subseteq X$ mit $\overline{A} = X$). Zeigen Sie, dass jeder topologische Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, separabel ist.

(b) Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie: ist X metrisierbar und separabel, so ist X zweitabzählbar.

Übung 3.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ mit der kofiniten Topologie nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

(b) Zeigen Sie auch, dass $\mathbb{R}$ mit der koabzählbaren Topologie nicht erstabzählbar ist. Hier ist eine Menge $U \subset \mathbb{R}$ offen bezüglich der koabzählbaren Topologie, falls U leer ist oder höchstens abzählbares Komplement hat.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung von $\mathbb{R}$ mit koabzählbarer Topologie nach $\mathbb{R}$ mit natürlicher Topologie, die x auf x schickt, folgenstetig ist, aber nicht stetig.

Übung 4.($\star$) Sei X eine zusammenhängende kompakte eindimensionale Mannigfaltigkeit. Wie folgt beweise man, dass X homöomorph zu S^1 ist:

(a) Zeigen Sie, dass es eine endliche Überdeckung $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ durch offene Mengen $U_i \subseteq X$ mit Homöomorphismen $\varphi_i \colon U_i \to \mathbb{R}$ gibt.

(b) Man nehme im folgenden an, dass n minimal ist. Man zeige, dass $n \geqslant 2$.

(c) Zeigen Sie, dass ein $j \in \{2, \ldots, n\}$ mit $U_1 \cap U_j \neq \varnothing$, $U_1 \setminus U_j \neq \varnothing$ und $U_j \setminus U_1 \neq \varnothing$ existiert.

(d) Sei o.B.d.A. $j = 2$. Sei Z eine Zusammenhangskomponente von $U_1 \cap U_2$. Zeigen Sie, dass $\varphi_1(Z)$ entweder gleich $(-\infty, a)$ oder gleich (b, ∞) ist, für $a, b \in \mathbb{R}$. Folgern Sie, dass $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ entweder gleich $(-\infty, a)$ (Fall 1), oder gleich (b, ∞) (Fall 2), oder gleich $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ (Fall 3) ist, für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

(e) In den ersten beiden Fälle aus (d) ist $U_1 \cup U_2$ ebenfalls zu $\mathbb{R}$ homöomorph, was gegen die Minimalität von n verstösst.

(f) Im dritten Fall aus (d) ist $U_1 \cup U_2$ zu S^1 homöomorph.

(g) Da S^1 kompakt ist, ist $U_1 \cup U_2 \subseteq X$ abgeschlossen; es folgt $n = 2$ und damit $X \cong S^1$.

Übung 5. Unter welchen Konstruktionen (wie z.B. Unterräume, feinere Topologie, abzählbare Produkte, ...) bleiben Erst- und Zweitabzählbarkeit jeweils erhalten?

Serie 12

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Sei X ein zusammenhängender normaler Hausdorffraum mit mindestens zwei Punkten. Zeigen Sie, dass X überabzählbar ist.

Übung 2. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass die Funktion $\delta\colon X \to [0, \infty)$ gegeben durch

$$x \mapsto d(x, A) \coloneqq \inf_{y \in A} |d(x, y)|$$

stetig ist und dass $\delta(x) > 0$ für alle $x \notin A$ gilt. Wo gibt es ein Problem, wenn A nicht abgeschlossen ist?

(b) Zeigen Sie das Urysohnsche Lemma für den metrischen Raum X ohne auf die Sätze oder Ideen der Vorlesungen aus der Woche 12 zu verweisen.

Übung 3.

(a) Ein topologischer Raum heisst *lokalkompakt*, falls jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat. Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Zeigen Sie, dass für alle $x \in X$ und abgeschlossene $A \subset X$ mit $x \notin A$ offene disjunkte Mengen $U, V \subset X$ existieren, sodass $x \in U$ und $A \subset V$.

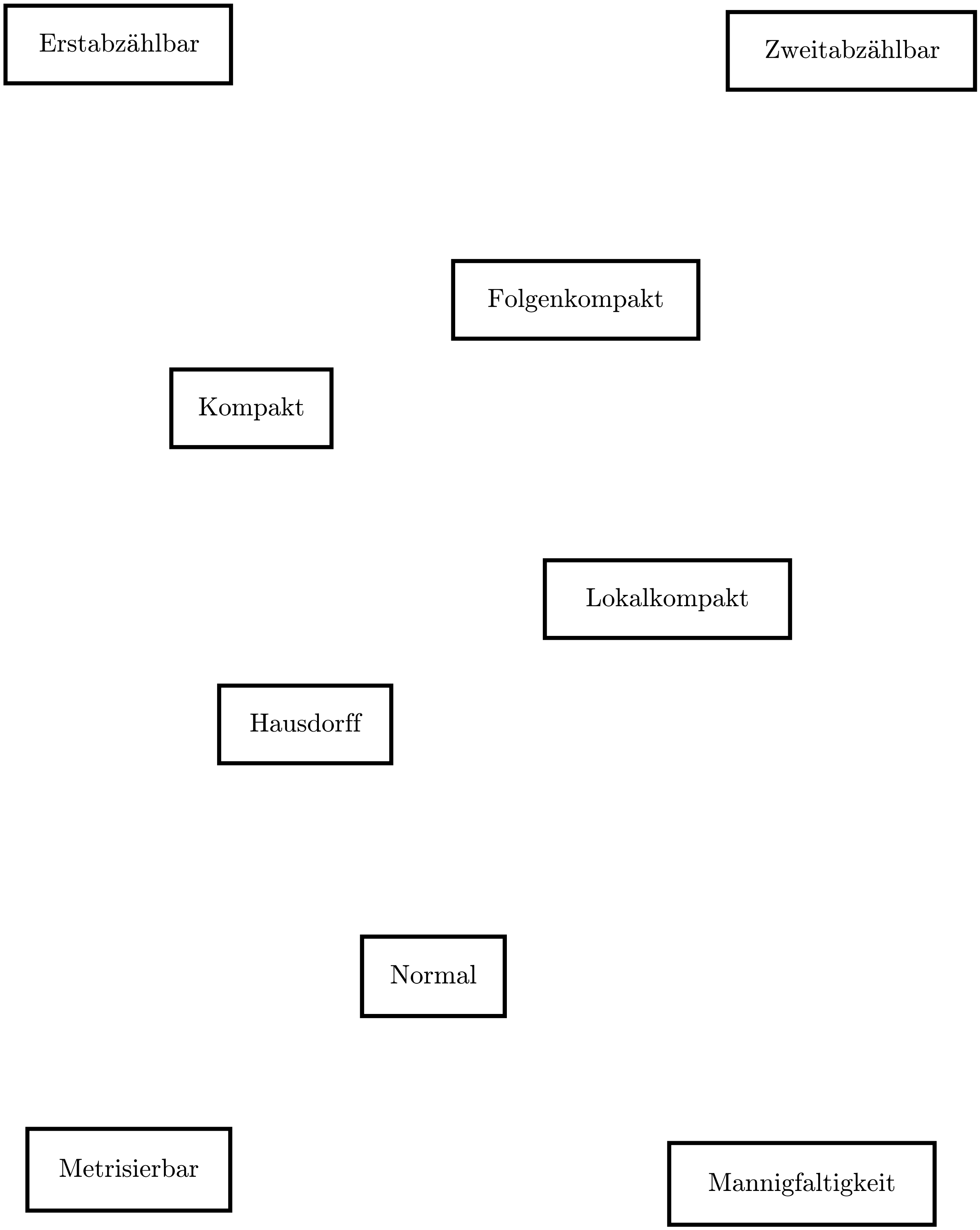
(b) Zeigen Sie, dass ein kompakter Hausdorffraum normal ist.

Übung 4.($\star$) Wir wollen zeigen, dass wir kompakte Mannigfaltigkeiten in „schöne“ topologische Räume einbetten können. Zur Erinnerung: Mit *Einbettung* meinen wir hier Homöomorphismus aufs Bild. Ein Korollar der folgenden Aussage ist auch, dass alle kompakten Mannigfaltigkeiten metrisierbar sind.

Sei M eine beliebige kompakte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass M in $\mathbb{R}^N$ eingebettet werden kann.

Übung 5. Zeigen Sie, dass eine Überlagerung (mit höchstens abzählbaren Fasern) einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit wieder eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Übung 6. Man zeichne auf der Rückseite alle bekannten Implikationen ein (auch diejenigen der Form $A \wedge B \Rightarrow C$ für Eigenschaften A, B, C).


Erstabzählbar
Zweitabzählbar
Folgenkompakt
Kompakt
Lokalkompakt
Hausdorff
Normal
Metrisierbar
Mannigfaltigkeit

Serie 13

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Abbildung p ist ein lokaler Homöomorphismus (d.h. jeder Punkt in Y hat eine offene Umgebung V sodass $p(V) \subset X$ offen und $p|_V$ ein Homöomorphismus aufs Bild ist).

(b) Falls $p^{-1}(x)$ für alle $x \in X$ einelementig ist, dann ist p ein Homöomorphismus.

Übung 2. Sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung, $A \subseteq X$ eine Teilmenge mit der Unterraumtopologie und $B \coloneqq p^{-1}(A)$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $p|_B\colon B \to A$ eine Überlagerung ist.

Übung 3.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $p_n\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$, eine Überlagerung ist.

(b) ($\star$) Sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom, das nicht konstant ist. Zeigen Sie, dass man Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ finden kann, so dass die Abbildung

$$P\colon \mathbb{C} \setminus P^{-1}(\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}) \to \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$$

eine Überlagerung ist.

Übung 4. ($\star$) Seien X, Y, Z topologische Räume und seien $p\colon X \to Y$ und $q\colon Y \to Z$ Überlagerungen. Weiter sei $q^{-1}(z)$ für alle $z \in Z$ eine endliche Menge. Zeigen Sie, dass $q \circ p\colon X \to Z$ eine Überlagerung ist.

Übung 5. Sei $f\colon S^1 \to S^1$,

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{wenn } \mathrm{Im}(z) \geqslant 0 \\ \bar{z}^2 & \text{wenn } \mathrm{Im}(z) \leqslant 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: die Abbildung f ist stetig, für alle $z \in S^1$ hat $f^{-1}(z)$ zwei Elemente, und jedes $z \in S^1$ hat eine offene Umgebung U sodass $f^{-1}(U)$ homöomorph zu $U + U$ ist; aber f ist keine Überlagerung.

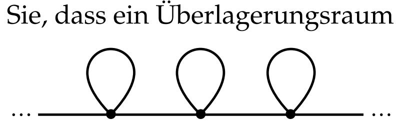
Übung 6. Satz 17.6 aus der Vorlesung besagt: operiert eine Gruppe G frei und eigentlich diskontinuierlich auf einem Raum Y (d.h. jedes $y \in Y$ hat eine offene Umgebung U sodass für alle $g \in G$ gilt $U \cap gU = \varnothing$), und ist Y einfach zusammenhängend, so folgt $\pi_1(Y/G, x_0) \cong G$. Benutzen Sie diesen Satz, um die Fundamentalgruppen der folgenden Räume zu bestimmen:

(a) $\mathbb{R}P^2$,

(b) $T^2 = S^1 \times S^1$,

(c) ($\star$) die Kleinsche Flasche.

Übung 7. Ähnlich wie in Serie 9, Übung 5 betrachten wir Graphen – diesmal allerdings auch unendliche. Seien V, E diskrete Räume, und $a, b\colon E \to V$ Funktionen. Dann heisst der topologische Raum $X = (V + (E \times [0,1]))/\sim$ mit $\sim$ erzeugt von $(e, 0) \sim a(e)$ und $(e, 1) \sim b(e)$ ein *Graph*. Die Punkte $v \in V \subset X$ heissen *Ecken*, und die Unterräume $e \times [0,1]/\sim \subset X$ für $e \in E$ *Kanten*. Zeigen Sie, dass ein Überlagerungsraum eines Graphen wieder ein Graph ist.



Beispiel eines unendlichen Graphen

Die folgenden Übungen benötigen Stoff aus der letzten Vorlesung von Montag, dem 26.5.

Übung 8. Sei $Z \subseteq \mathbb{C}^*$ offen und zusammenhängend, $z_0 \in Z$ und $i\colon Z \to \mathbb{C}^*$ die Inklusion. Zeigen Sie, dass sich genau dann ein stetiger Logarithmus auf Z definieren lässt, wenn $i_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq \pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)$ die triviale Gruppe ist. Hierbei sei ein Logarithmus auf Z eine Abbildung $\log\colon Z \to \mathbb{C}$, welche $e^{\log(z)} = z$ für alle $z \in Z$ erfüllt.

Übung 9. Bestimmen Sie zwei Überlagerungen $p\colon X \to T^2$ und $p'\colon X' \to T^2$ des Torus T^2, sodass $p'\colon X \to T^2$ und $p'\colon X' \to T^2$ die gleiche (endliche) Anzahl von Blättern haben, aber sodass es keine Homöomorphismen $\phi\colon X \to X'$ und $\psi\colon T^2 \to T^2$ gibt mit $p' \circ \phi = \psi \circ p$.

Übung 10. ~~Sei X ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum mit endlicher Fundamentalgruppe. Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f\colon X \to S^1$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist.~~ *Diese Aufgabe ist gestrichen. Zur Lösung bräuchte man das Hochhebbarkeitskriterium (siehe z.B. Jänich S. 174 oder Hatcher Proposition 1.33. S. 61, welches wir in der Vorlesung nicht mehr betrachtet haben.*

Übung 11. Beschreiben Sie bis auf Isomorphie alle Überlagerungen $p\colon Y \to X$ von X mit wegzusammenhängendem Y, wobei

(a) $X = S^1$,

(b) $X = S^1 \times S^2$,

(c) $X = S^1 \vee S^2$.

Übung 12.

(a) ($\star$) Finden Sie eine Überlagerung $p\colon Y \to S^1 \vee S^1$, sodass $\pi_1(Y, y_0)$ unendlich erzeugt ist.

(b) ($\star$) Finden Sie bis auf Isomorphie alle 2-blättrigen Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$.

(c) ($\star\star$) Finden Sie bis auf Isomorphie alle 3-blättrigen Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$.