

Name und Vorname:

Topologie: Quiz 1, 03/03/2025

Es können jeweils mehrere Antworten richtig sein. Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Eine Aufgabe gibt 2 Punkte, wenn jedes Kreuz richtig ist, 1 Punkt, wenn jedes Kreuz ausser einem richtig ist, und 0 Punkte sonst.

F. 1: Welche der folgenden Aussagen gelten für alle Teilmengen A, B aller topologischen Räume?

- ☐ a. $A \subset \overline{A}$.
- ☐ b. $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$.
- ☐ c. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- ☐ d. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

F. 2: Welche der folgenden Topologien auf $\mathbb{Q}^2$ sind feiner als die jeweils drei anderen?

- ☐ a. Die kofinite Topologie (U offen $\Leftrightarrow U$ ist leer oder hat endliches Komplement).
- ☐ b. Die von der Standardmetrik induzierte Topologie.
- ☐ c. Die indiskrete Topologie.
- ☐ d. Die Topologie, welche von der Metrik $d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ induziert ist.

Name und Vorname:

Topologie: Quiz 2, 17/03/2025

Es können jeweils mehrere Antworten richtig sein. Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Eine Aufgabe gibt 2 Punkte, wenn jedes Kreuz richtig ist, 1 Punkt, wenn jedes Kreuz ausser einem richtig ist, und 0 Punkte sonst.

F. 1: Welche der folgenden Paare topologischer Räume sind homöomorph?

- ☐ a. $[0, 1) + [1, 2)$ und $[0, 1) + [2, 3)$.
- ☐ b. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\}$ und $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 1\}$.
- ☐ c. $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie, und $\mathbb{R}$ mit der von allen Teilmengen (a, b) für $a, b \notin \mathbb{Q}$, $a < b$ erzeugten Topologie.
- ☐ d. $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ und $\mathbb{Z}$ (beide Räume mit der Unterraumtopologie von $\mathbb{R}$).

F. 2: Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ a. Sei C die Cantormenge, dann ist $C \times C$ kompakt.
- ☐ b. Sei C die Cantormenge, dann ist $C \times \mathbb{R}$ zusammenhängend.
- ☐ c. Das Bild einer stetigen Funktion $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist Hausdorff.
- ☐ d. Für nicht-disjunkte wegzusammenhängende Teilmengen A, B eines topologischen Raums X ist auch $A \cup B$ wegzusammenhängend.

Name und Vorname:

Topologie: Quiz 3, 31/03/2025

Es können jeweils mehrere Antworten richtig sein. Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Eine Aufgabe gibt 2 Punkte, wenn jedes Kreuz richtig ist, 1 Punkt, wenn jedes Kreuz ausser einem richtig ist, und 0 Punkte sonst.

F. 1: Welche der folgenden vier topologischen Räume sind homöomorph? (Mindestens zwei Antworten ankreuzen!)

- 3
- ☐ a. $\mathbb{R}/G$, wobei die Gruppe $G = \mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}$ durch $n \cdot x := x + n$ für $n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$, agiert.
 - ☐ b. Der Raum, der aus $\mathbb{R}$ durch das Zusammenschlagen der Teilmenge $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ zu einem Punkt entsteht.
 - ☐ c. Die Wedgesumme abzählbar vieler Kreise: $\bigvee_{k=1}^{\infty} S^1$.
 - ☐ d. Die Hawaiianischen Ohrringe $\bigcup_{k=1}^{\infty} \partial B((\frac{1}{k}, 0), \frac{1}{k}) \subset \mathbb{R}^2$.

F. 2: Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ a. Seien X, Y topologische Räume, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X , und $f: X/\sim \rightarrow Y$ eine Funktion, sodass $X \rightarrow Y, x \mapsto f([x])$ stetig ist. Dann folgt, dass f stetig ist.
- ☐ b. Ist X ein diskreter topologischer Raum, und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X , dann ist auch $X/\sim$ diskret.
- ☐ c. Es gibt eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}^2$, sodass $S^2 \cong \mathbb{R}^2/\sim$.
- ☐ d. Es gibt eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}^2$, sodass $\mathbb{Q}^2 \cong \mathbb{R}^2/\sim$.

Name und Vorname:

Topologie: Quiz 4, 14/04/2025

Es können jeweils mehrere Antworten richtig sein. Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Eine Aufgabe gibt 2 Punkte, wenn jedes Kreuz richtig ist, 1 Punkt, wenn jedes Kreuz ausser einem richtig ist, und 0 Punkte sonst.

F. 1: Welche der folgenden vier topologischen Räume sind homotopieäquivalent? (Mindestens zwei Antworten ankreuzen!)

- ☐ a. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$.
- ☐ b. $S^1 \vee S^1$.
- ☐ c. $S^1 \times S^1$.
- ☐ d. $S^2 \setminus \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

F. 2: Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ a. Schickt ein Funktor den Morphismus f auf einen Isomorphismus, dann folgt, dass f ein Isomorphismus ist.
- ☐ b. Ein top. Raum X ist genau dann zusammenziehbar, wenn er $\{x\}$ als Retrakt hat für ein $x \in X$.
- ☐ c. Sei X ein top. Raum, $X = U \cup V$ mit U abgeschlossen, V offen. Sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass $f|_U$ und $f|_V$ stetig sind. Dann folgt, dass f stetig ist.
- ☐ d. Seien $f: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow Y$ stetig, und $x_0 \in X$. Dann ist $(g \circ f)_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, g(f(x_0)))$ trivial.

Name und Vorname:

Topologie: Quiz 5, 05/05/2025

Es können jeweils mehrere Antworten richtig sein. Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Eine Aufgabe gibt 2 Punkte, wenn jedes Kreuz richtig ist, 1 Punkt, wenn jedes Kreuz ausser einem richtig ist, und 0 Punkte sonst.

F. 1: Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ a. Ist ein top. Raum X gleich $U \cup V$ für einfach zusammenhängende offene Teilmengen $U, V \subset X$ mit $U \cap V \simeq S^2$, dann ist X einfach zusammenhängend.
- ☐ b. Die Gruppe $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ enthält ein Element der Ordnung 3.
- ☐ c. Es existiert ein topologischer Raum X mit $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3$.
- ☐ d. Für jeden Unterraum $X \subset \mathbb{R}$ gilt: sind $\sigma, \tau: [0, 1] \rightarrow X$ Wege mit $\sigma(0) = \tau(0)$ und $\sigma(1) = \tau(1)$, so folgt $\sigma \simeq_{\{0,1\}} \tau$.

F. 2: Sei $A = B = (S^1, 1)$. Sei p^A die Abbildung $A \vee B \rightarrow A, p^A(a \in A) = a, p^A(b \in B) = 1$. Sei $p^B: A \vee B \rightarrow B$ analog definiert. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ a. $p_*^A: \pi_1(A \vee B, 1) \rightarrow \pi_1(A, 1)$ ist surjektiv.
- ☐ b. Der Schnitt $(\ker p_*^A) \cap (\ker p_*^B)$ ist die triviale Untergruppe von $\pi_1(A \vee B, 1)$.
- ☐ c. $\pi_1(A \vee B, 1)$ ist von $\ker p_*^A$ und $\ker p_*^B$ erzeugt.
- ☐ d. $\ker p_*^A \cong \mathbb{Z}$.

Name und Vorname:

Topologie: Quiz 6, 19/05/2025

Es können jeweils mehrere Antworten richtig sein. Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Eine Aufgabe gibt 2 Punkte, wenn jedes Kreuz richtig ist, 1 Punkt, wenn jedes Kreuz ausser einem richtig ist, und 0 Punkte sonst.

F. 1: Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ a. Jeder endliche topologische Raum ist zweitabzählbar.
- ☐ b. Jeder kompakte topologische Raum ist erstabzählbar.
- ☐ c. Jeder Unterraum eines zweitabzählbaren Raums ist erstabzählbar.
- ☐ d. Sei X erstabzählbar. Sei $U \subset X$, sodass für jede Folge in $X \setminus U$, die gegen ein $x \in X$ konvergiert, $x \notin U$ gilt. Dann ist U offen.

F. 2: Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ a. Es gibt eine eindimensionale kompakte Mannigfaltigkeit mit Fundamentalgruppe $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.
- ☐ b. Der Raum $\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^2$ hat abelsche Fundamentalgruppe.
- ☐ c. Sei $T = S^1 \times S^1$ der Torus und $x, y \in T$, $x \neq y$. Sei $\iota: T \setminus \{y\} \rightarrow T$ die Inklusion. Dann ist $\iota_*: \pi_1(T \setminus \{y\}, x) \rightarrow \pi_1(T, x)$ injektiv.
- ☐ d. Der Homomorphismus ι_* aus c. ist surjektiv.