Serie 1

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung mehr oder weniger eine direkte Anwendung der Vorlesung ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf dem Übungsblatt!

* * *

Übung 1. Sei $X = [-1, 1]$ als Unterraum von $\mathbb{R}$ mit der Unterraumtopologie. Entscheiden Sie für jede der folgenden Mengen in X ob sie offen, abgeschlossen, beides, oder keines von beidem ist:

$$\{x \in X \mid \tfrac{1}{2} < |x| < 1\},$$
$$\{x \in X \mid \tfrac{1}{2} < |x| \leqslant 1\},$$
$$\{x \in X \mid \tfrac{1}{2} \leqslant |x| < 1\},$$
$$\{x \in X \mid \tfrac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 1\}.$$

Übung 2. Sei X eine Menge.

(a) Zeigen Sie, dass
$$\mathcal{O}_{\mathrm{cof}} \coloneqq \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ ist endlich oder } U \text{ ist die leere Menge}\}$$
eine Topologie auf X ist. Man nennt $\mathcal{O}_{\mathrm{cof}}$ die kofinite Topologie.

(b) Für welche Mengen X bildet die Menge aller endlicher Teilmengen eine Topologie?

Übung 3. Sei X eine Menge.

(a) Seien d_1 und d_2 Metriken auf X, so dass es eine reelle Zahl $a > 0$ gibt mit
$$d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y)^a$$
für alle $(x, y) \in X \times X$. Beweisen Sie, dass d_2 eine feinere Topologie als d_1 auf X induziert. Nehmen Sie jetzt zusätzlich an, dass es eine reelle Zahl $b > 0$ gibt mit
$$d_2(x, y) \leqslant d_1(x, y)^b$$
für alle $(x, y) \in X \times X$. Beweisen Sie, dass d_1 und d_2 dieselbe Topologie auf X induzieren.

(b) Sei d eine Metrik auf X. Zeigen Sie, dass
$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$
eine Metrik auf X definiert. Zeigen Sie, dass δ und d dieselben Topologien definieren. Zeigen Sie $\delta(x, y) \leqslant 1$ für alle $(x, y) \in X \times X$. (Dies demonstriert, dass man in jedem metrischen Raum die Metrik so ändern kann, dass zwei beliebige Punkte den Abstand $\leqslant 1$ haben, ohne die Topologie zu ändern.)

Übung 4. Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine Menge.

(a) Zeigen Sie, dass das Innere A° die grösste in A enthaltene offene Menge ist, d.h. A° ist offen und für jede offene Menge $B \subseteq A$ gilt $B \subseteq A^\circ$.

(b) Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ von A die kleinste abgeschlossene Menge ist, die A enthält, d.h. $\overline{A}$ ist abgeschlossen und für jede abgeschlossene Menge B mit $B \supseteq A$ gilt $B \supseteq \overline{A}$.

(c) Zeigen Sie, dass das Innere des Rands von A leer ist, d.h. $(\partial A)^\circ = \emptyset$.

Übung 5. (⋆) Sei $\mathbb{Z}$ die Menge aller ganzen Zahlen und

$$\mathcal{B} = \{a\mathbb{Z} + b \mid a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \quad b \in \mathbb{Z}\}$$

eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis für eine Topologie $\mathcal{O}$ ist und dass alle Elemente von $\mathcal{B}$ bezüglich $\mathcal{O}$ abgeschlossen sind.

(b) Zeigen Sie

$$\mathbb{Z}\backslash\{-1, 1\} = \bigcup_{p \text{ prim}} p\mathbb{Z}.$$

(c) Folgern Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt [1,2].

Übung 6. Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Folgen reeller Zahlen. Sei $\mathcal{O}$ die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (das Produkt hat $\mathbb{N}$ viele Faktoren, und jeder Faktor ist $\mathbb{R}$).

(a) Sei

$$d((x_n), (y_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\min(|x_n - y_n|, 1)}{2^n},$$

für zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass d wohldefiniert[3] ist und eine Metrik auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.

(b) (⋆⋆) Zeigen Sie, dass die von der Metrik d induzierte Topologie gleich $\mathcal{O}$ ist[4].

(c) Beschreiben Sie eine Metrik e auf $\coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$, welche die Summentopologie der $\mathbb{N}$ Kopien von $\mathbb{R}$ induziert[5].

* * *

[1] Zeigen Sie, dass alle offenen Menge unendlich sind.

[2] Gäbe es nur endlich viele Primzahlen, könnte man zeigen, dass $\mathbb{Z}\backslash\{-1, 1\}$ abgeschlossen ist.

[3] Die Reihe ist stets kleiner als $\sum \frac{1}{2^n}$.

[4] Man kann zeigen, dass es für alle offenen Mengen U in $\mathcal{O}$ und $x \in U$ ein $r > 0$ gibt, sodass $B(x, r) \subset U$. Und *vice versa* kann man zeigen, dass jeder Ball $B(x, r)$ eine offene Menge U in $\mathcal{O}$ mit $x \in U$ enthält.

[5] Man kann $e(x, y) = 1$ setzen falls x, y in verschiedenen Kopien liegen.