Serie 2

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Sei X eine Menge und sei Y ein topologischer Raum. Sei $f\colon X \to Y$ eine beliebige Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{O}$ der Teilmengen von X der Form $U = f^{-1}(V)$ für offene Mengen $V \subseteq Y$ eine Topologie auf X ist. Diese heisst *Initialtopologie* bezüglich f.

(b) Zeigen Sie, dass $f\colon (X, \mathcal{O}) \to Y$ stetig ist.

(c) Sei X' eine Menge mit Topologie $\mathcal{O}'$. Angenommen, alle Funktionen $f\colon X' \to Y'$ für alle topologischen Räume Y' sind stetig. Was können Sie über $\mathcal{O}'$ sagen?

(d) Sei X' eine Menge mit Topologie $\mathcal{O}'$. Angenommen, alle Funktionen $f\colon Y' \to X'$ für alle topologischen Räume Y' sind stetig. Was können Sie über $\mathcal{O}'$ sagen?

Übung 2. Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass es für jede Menge von Teilmengen $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ genau eine Topologie $\mathcal{O}_S$ auf X gibt, sodass S eine Subbasis von $\mathcal{O}_S$ ist. Zeigen Sie weiter, dass dies die kleinste (auch gröbste genannt) Topologie von X ist, die S enthält, d.h. ist $\mathcal{O}$ eine Topologie von X mit $S \subseteq \mathcal{O}$, dann gilt $\mathcal{O}_S \subseteq \mathcal{O}$.

Übung 3.

(a) ($\star$) Entscheiden Sie, welche der folgenden topologischen Räume homöomorph zueinander sind[1]:

$$\mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^2, \quad (0,1), \quad [0,1), \quad [0,1], \quad S^1.$$

(b) ($\star\star\star$) Sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}^2$ homöomorph?

Übung 4. Seien X die reellen Zahlen mit der natürlichen Topologie (der von der euklidischen Metrik induzierten), und Y die reellen Zahlen mit der von allen Intervallen der Form $[a, b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ erzeugten Topologie.

(a) Zeigen Sie, dass die Topologie von Y feiner als die Topologie von X ist.

(b) Man beschreibe die stetigen Funktionen $f\colon Y \to X$.[2]

Übung 5. In dieser Übung vergleichen wir Zusammenhang und Wegzusammenhang.

(a) Zeigen Sie, dass ein wegzusammenhängender Raum X auch zusammenhängend ist.

(b) ($\star$) Zeigen Sie, dass ein zusammenhängender topologischer Raum X, in dem jeder Punkt eine wegzusammenhängende offene Umgebung hat, auch wegzusammenhängend ist[3].

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ mit der kofiniten Topologie zusammenhängend ist. (Die kofinite Topologie ist in Serie 1 definiert.)

(d) ($\star\star$) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ mit der kofiniten Topologie nicht wegzusammenhängend ist[3].

Übung 6. Die Mengen $\Pi_{i \in I} U_i$ mit $U_i \subset X_i$ offen für alle $i \in I$ bilden eine Basis für eine Topologie auf $\Pi_{i \in I} X_i$, die sogenannte *Box-Topologie*. Betrachten wir $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit dieser Topologie. Zeigen Sie, dass die Menge aller Folgen, die gegen 0 konvergieren, eine offene und abgeschlossene Menge ist. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie und $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit der Boxtopologie nicht homöomorph sind.

* * *

[1] Was passiert, wenn man aus diesen Räumen einen Punkt löscht? [2] Es sind die rechtsstetigen Funktionen – warum?

[3] Betrachten Sie für alle $x \in X$ die Menge $S(x)$ aller Punkte, zu denen es einen Weg von x gibt.

[4] Zeigen Sie: $[0, 1]$ ist nicht die Vereinigung von mehr als zwei, aber nur abzählbar vielen disjunkten abgeschlossenen Mengen.