Serie 3

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Zeigen Sie, dass eine konvergente Folge in einem Hausdorffraum nur einen Häufungspunkt hat. Ein Punkt ist ein *Häufungspunkt* einer Folge, falls jede Umgebung des Punktes unendlich viele Folgenglieder enthält. Folgern Sie, dass in einem Hausdorffraum der Grenzwert einer Folge, sofern er existiert, eindeutig ist.

Übung 2. Wie in Serie 2, Übung 4, seien X die reellen Zahlen mit der natürlichen Topologie, und Y die reellen Zahlen mit der von Intervallen der Form $[a, b)$ mit $a < b$ erzeugten Topologie.

(a) Man zeige, dass Y *total unzusammenhängend* ist (d.h. dass Einpunktmengen die einzigen zusammenhängenden Teilmengen von Y sind).

(b) Man beschreibe die stetigen Abbildung $X \to Y$.

Übung 3. Wie in Serie 1, Übung 2, sei $(X, \mathcal{O}_{\text{cof}})$ ein topologischer Raum mit der kofiniten Topologie.

(a) Zeigen Sie, dass X das Axiom T_1 erfüllt, d.h. für zwei verschiedene Punkte $a \neq b$ in X existieren offene Umgebungen von a und b, welche den jeweils anderen Punkt nicht enthalten.

(b) Wann ist X ein Hausdorffraum?

(c) Zeigen Sie, dass ein beliebiger topologischer Raum X genau dann das Axiom T_1 erfüllt, wenn alle einelementigen Teilmengen von X abgeschlossen sind.

Übung 4. Sei X eine Menge.

(a) Was sind die kompakten Mengen in X mit der diskreten Topologie?

(b) Was sind die kompakten Mengen in X mit der kofiniten Topologie?

Übung 5. (Wegzusammenhangskomponenten) Sei X ein topologischer Raum und sei $x_0 \in X$.

(a) Die Menge
$$\{x \in X \mid \text{ es gibt einen Weg von } x \text{ nach } x_0\}$$
heisst *Wegzusammenhangskomponente* von x_0 (in der Vorlesung haben Sie die Zusammenhangskomponenten gesehen). Zeigen Sie, dass dies die grösste wegzusammenhängende Teilmenge von X ist, welche x_0 enthält.

(b) Was sind die Zusammenhangskomponenten und Wegzusammenhangskomponenten in $\mathbb{Q}$?

(c) Finden Sie ein Beispiel eines topologischen Raums mit einer Wegzusammenhangskomponente, die nicht abgeschlossen ist.

Übung 6.

(a) Zeigen Sie, dass das Produkt zweier nicht-leerer topologischer Räume X, Y genau dann kompakt ist, wenn X und Y kompakt sind.

(b) Zeigen Sie, dass das Produkt zweier topologischer Räume X, Y genau dann zusammenhängend ist, wenn X und Y zusammenhängend sind.

Seien $(X_i)_{i\in I}$ topologische Räume.

(c) Zeigen Sie, dass $\Pi_{i\in I}X_i$ genau dann wegzusammenhängend ist, wenn X_i wegzusammenhängend für alle $i \in I$ ist.

(d) ($\star\star$) Zeigen Sie, dass $\Pi_{i\in I}X_i$ genau dann zusammenhängend ist, wenn X_i zusammenhängend für alle $i \in I$ ist.

Übung 7.

Die *Cantor-Menge* $C \subseteq \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert. Sei

$$C_1 := [0,1] \quad \text{und} \quad C_n := \frac{1}{3}C_{n-1} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1}\right).$$

Nachfolgend sind C_1 bis C_7 abgebildet.

Dann ist die Cantor-Menge definiert durch

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge kompakt ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge überabzählbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponenten von C jeweils nur aus einem Punkt bestehen (d.h. C ist *total unzusammenhängend*), aber C keine isolierten Punkte hat. Hier heisst ein Punkt x eines topologischen Raums *isoliert*, falls $\{x\}$ offen ist.

(d) ($\star\star\star$) Zeigen Sie, dass jeder nicht-leere, total unzusammenhängende, metrisierbare, kompakte topologische Raum X ohne isolierte Punkte homöomorph zu C ist. Zum Aufwärmen kann man z.B. zeigen, dass C zu $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ homöomorph ist, wobei $\{0,1\}$ die diskrete Topologie trägt.

* * *