Serie 5

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn eine Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf dem Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Sei X ein topologischer Raum und CX der Kegel über X. Zeigen Sie, dass CX wegzusammenhängend ist.

Übung 2. Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ den Kegel CS^n und die Suspension ΣS^n bis auf Homöomorphie.

Übung 3.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi\colon S^{n-1} \subseteq \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$, $x \mapsto x$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{D}^n \cup_\varphi \mathbb{D}^n$ homöomorph zu S^n ist.

(b) Sei X ein topologischer Raum und CX der Kegel über X. In welchem Sinne kann man CX mit CX verkleben, sodass man ΣX bekommt?

Übung 4. Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G, versehen mit einer Topologie, bezüglich der die Abbildungen

$$G \times G \to G,\ (g, g') \mapsto gg' \text{ und } G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$$

stetig sind. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für jedes $g_0 \in G$ sind die *Rechtstranslation* $G \to G$, $g \mapsto gg_0$ und die *Linkstranslation* $G \to G$, $g \mapsto g_0 g$ Homöomorphismus.

(b) Die Stetigkeit der genannten Abbildungen ist äquivalent zu der Stetigkeit der *einen* Abbildung $G \times G \to G$, $(g, g') \mapsto g^{-1}g'$.

(c) Sei $GL_n(\mathbb{R})$ eine Gruppe mit der Topologie, der von der Inklusion $GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ kommt. Zeigen Sie, dass $GL_n(\mathbb{R})$ eine topologische Gruppe ist.

(d) Die Topologie auf G ist schon eindeutig bestimmt durch eine Umgebungsbasis des Einselementes e. Hier ist eine *Umgebungsbasis* von e eine Familie offener Mengen, sodass jede offene Umgebung von e eine Menge U aus der Familie mit $e \in U$ enthält.

(e) Ein Homomorphismus von topologischem Gruppen ist stetig dann und nur dann, wenn er beim Einselement stetig ist. Hier ist eine Funktion *stetig bei* e, wenn das Urbild jeder Umgebung des Bildes von e eine Umgebung von e ist.

(f) $(\star)$ Jede offene Untergruppe $H \subset G$ ist abgeschlossen.

(g) Ist $H \subset G$ eine normale Untergruppe, so ist die Quotientengruppe G/H mit der Quotiententopologie wieder eine topologische Gruppe.

Übung 5. Sei X ein Hausdorffraum und K eine kompakte Teilmenge von X. Zeigen Sie:

(a) Der Quotientenraum X/K ist ein Hausdorffraum.

(b) Sei $A \subsetneq K$ eine offene Teilmenge von X. Dann ist die durch $f([x]_A) = [x]$ definierte Abbildung

$$f\colon (X \setminus A)/(K \setminus A) \to X/K$$

wohldefiniert und ein Homöomorphismus. Hierbei bezeichnen $[x]_A$ und $[x]$ die Äquivalenzklassen in $(X \setminus A)/(K \setminus A)$ bzw. X/K.

(c) Die Aussage aus (b) stimmt nicht, wenn $A = K$ ist.

(d) Angenommen, X ist kompakt. Dann ist X/K die Einpunktkompaktifizierung von $X \setminus K$. Die Einpunktkompaktifizierung wurde auf Serie 4 definiert.

Übung 6. In dieser Übung zeigen wir in zwei Schritten, dass für alle Familien kompakter topologischer Räume $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ das Produkt

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

wiederum kompakt ist (in Serie 3, Übung 6 hatten Sie dies für endliche Produkte gezeigt).

(a) ($\star\star$) Zeigen Sie, dass jede Überdeckung des Produktes durch Zylinder eine endliche Teilüberdeckung hat[1].

(b) ($\star\star$) Sei X ein beliebiger topologischer Raum mit Subbasis $\mathcal{B}$. Angenommen, für alle Überdeckungen $\mathcal{V} = \{B_a\}_{a \in A}$ von X mit Elementen B_a von $\mathcal{B}$ (d.h. also $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$) gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(B_{a_1}, \ldots B_{a_n})$ von X. Zeigen Sie, dass X dann kompakt ist[2].

* * *

[1] Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung mit Elemente in $\mathcal{B}$. Für alle $\alpha \in A$ sei $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{U}$ die Teilmenge der Elemente $\pi^{-1}(U)$ mit $U \subset X_\alpha$.
Zeigen Sie, dass es $\alpha \in A$ $\mathcal{U}_\alpha$ eine Überdeckung von $\prod_\alpha X_\alpha$ existiert.

[2] Zeigen Sie zuerst, dass es eine maximale offene Überdeckung $\mathcal{C}$ ohne endliche Teilüberdeckung gibt
(maximal bedeutet: $\mathcal{C} \cup \{U\}$ für eine beliebige offene Menge $U \notin \mathcal{C}$ hat eine endliche Teilüberdeckung).