Serie 6

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1.

Lemma 1 (Verklebungslemma)**.** *Seien X und Y topologische Räume und sei $X = A \cup B$ eine Überdeckung von X mit abgeschlossenen Mengen $A, B \subseteq X$. Weiter seien $f\colon A \to Y$ und $g\colon B \to Y$ stetige Abbildungen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A \cap B$ und sei $h\colon X \to Y$ definiert durch*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in A, \\ g(x), & \text{falls } x \in B. \end{cases}$$

Dann h ist eine wohldefinierte stetige Abbildung.

Bemerkung 1. *Diese Aussage lässt sich verallgemeinern für eine Überdeckung von X mit endlich vielen abgeschlossenen Mengen, aber auch für eine beliebige Überdeckung von X mit offenen Mengen.*

(a) Zeigen Sie das Verklebungslemma.

(b) Sei X ein topologischer Raum und seien γ_0 und γ_1 zwei Wege in X mit $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$. Zeigen Sie, dass dann der Weg $\gamma_0\gamma_1$ stetig ist.

(c) Sei X ein topologischer Raum und seien $x, y, z \in X$. Seien γ_0 und γ_0' zwei Wege in X von x nach y und γ_1 und γ_1' zwei Wege in X von y nach z. Zeigen Sie, dass falls $\gamma_0 \simeq \gamma_0'$ und $\gamma_1 \simeq \gamma_1'$ rel Endpunkte gilt, so gilt auch $\gamma_0\gamma_1 \simeq \gamma_0'\gamma_1'$ rel Endpunkte.

Übung 2. Zeigen Sie, dass $\{5\} \subset \mathbb{Q}$ ein Retrakt von $\mathbb{Q}$ ist, aber kein Deformationsretrakt.

Übung 3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $\mathrm{id}_{S^n}, p\colon S^n \to S^n$ die stetigen Abbildungen gegeben durch $\mathrm{id}_{S^n}(v) = v$ und $p(v) = -v$.

(a) Zeigen Sie für $n = 1$, dass p homotop zu id_{S^n} ist.

(b) Zeigen Sie für alle ungeraden n, dass p homotop zu id_{S^n} ist.

Übung 4. Zeigen Sie, dass das Möbiusband homotopieäquivalent zum Zylinder $S^1 \times [0, 1]$ ist.

Übung 5. Seien X und Y homotopieäquivalente Räume.

(a) Zeigen Sie, dass X genau dann wegzusammenhängend ist, wenn Y wegzusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn Y zusammenhängend ist.

(c) ($\star$) Sei $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Bezeichne $[z]_Z$ und $[z]_W$ die Zusammenhangs- bzw. die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes z in X oder Y. Zeigen Sie, dass $[z]_Z \mapsto [f(z)]_Z$ und $[z]_W \mapsto [f(z)]_W$ Bijektionen zwischen den Zusammenhangskomponenten bzw. den Wegzusammenhangskomponenten von X und Y definieren.

Übung 6. ($\star$) Zeigen Sie, dass $O_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ ein Deformationsretrakt ist. Die topologische Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$ ist in Serie 5, Übung 4 definiert[1].

Übung 7. (Koprodukt in der Kategorientheorie) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Seien A und B zwei Objekte von $\mathcal{C}$. Ein *Koprodukt* C von A und B ist ein Objekt von $\mathcal{C}$ mit zwei Morphismen $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, C)$ und $\beta \in \mathrm{Hom}(B, C)$, sodass folgendes gilt: Für alle Objekte D von $\mathcal{C}$ und Morphismen $\alpha' \in \mathrm{Hom}(A, D)$ und $\beta' \in \mathrm{Hom}(B, D)$ **gibt** es einen **eindeutigen** Morphismus $\gamma \in \mathrm{Hom}(C, D)$ mit $\alpha' = \gamma \circ \alpha$ und $\beta' = \gamma \circ \beta$.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\alpha'"] & \\ C \arrow[rr, dashed, "\exists!\gamma"] & & D \\ & B \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "\beta'"'] & \end{tikzcd}$$

(a) Zeigen Sie, dass das Koprodukt, sofern es existiert, eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus ist.

(b) Bestimmen Sie das Koprodukt von zwei Objekten A und B in den folgenden Kategorien.

 (i) $\mathcal{C} =$ **Set**.
 (ii) $\mathcal{C} =$ **Top**.
 (iii) $\mathcal{C} = \mathbf{Vek}_{\mathbb{R}}$ (Objekte: alle $\mathbb{R}$-Vektorräume, Morphismen: $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen).
 (iv) $\mathcal{C}$ die Kategorien aller topologischen Räumen mit Basispunkt, und Morphismen den basispunkterhaltenden stetigen Abbildungen.
 (v) $\mathcal{C}$ ist deine Lieblingskategorie.
 (vi) Können Sie eine Kategorie finden, die keine Koprodukte hat?

[1] Benutzen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren.