



Serie 7

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Seien X, Y topologische Räume. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Sei $x_0 \in X$ beliebig und $y_0 \in Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Beweisen Sie die Funktorialität der Fundamentalgruppe, also folgende Aussagen.

- (a) $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, $[\sigma] \mapsto [f \circ \sigma]$ definiert einen Gruppenhomomorphismus.
- (b) $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.
- (c) Sei Z ein topologischer Raum, $g: Y \rightarrow Z$ stetig und $z_0 \in Z$ mit $z_0 = g(y_0) = g(f(x_0))$. Dann gilt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, wobei $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, $g_*: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(Z, z_0)$ und $(g \circ f)_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Z, z_0)$.

Übung 2. Sei $A \subseteq X$ ein Retrakt mit Retraktion $\rho: X \rightarrow A$ und bezeichne $i: A \rightarrow X$ die Inklusion. Sei $a \in A \subseteq X$.

- (a) Zeigen Sie, dass $i_*: \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$ injektiv ist und $\rho_*: \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(A, a)$ surjektiv ist.
- (b) Sei ρ nun eine Deformationsretraktion. Nehmen Sie zusätzlich an, dass die Homotopie $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ von $H_0 = i \circ \rho$ nach $H_1 = \text{id}_X$ relativ A ist (d.h. für alle $t \in [0, 1]$, $x \in A$ gilt $H_t(x) = x$). Zeigen Sie, dass dann i_* und ρ_* zueinander inverse Gruppenisomorphismen sind.
- (c) (*) Sei ρ eine Deformationsretraktion. Zeigen Sie, dass auch ohne die zusätzliche Annahme in (b) folgt, dass i_* und ρ_* zueinander inverse Gruppenisomorphismen sind.

Eine Deformationsretraktion mit der Zusatzannahme aus (b) wird oft „starke“ Deformationsretraktion genannt (z.B. von Jänich). In anderen Quellen (z.B. Hatcher) ist die Zusatzannahme Bestandteil der Definition einer Deformationsretraktion.

Übung 3.

- (a) Seien X und Y topologische Räume und $x_0 \in X, y_0 \in Y$. Finden Sie einen (kanonischen) Gruppenisomorphismus zwischen $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ und $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.
- (b) Sei $X = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in X$ beliebig. Bestimmen Sie den Isomphietyp von $\pi_1(X, x_0)$.

Hinweis: Sie dürfen hier benutzen, dass für $n = 1$, $\pi_1(X, x_0)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist. Diese Aussage wird in der Vorlesung noch gezeigt.

Übung 4. Sei $\mathcal{E}$ die Kategorie mit Objekten den Euklidischen Räumen $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ und Morphismen $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ den glatten Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$, die den Ursprung auf den Ursprung senden, mit der üblichen Verknüpfung von Funktionen. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $\mathcal{F}$, die jedem $\mathbb{R}^n$ sich selbst und jedem $f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ das Differential $Df(0)$ von f im Ursprung zuordnet, einen kovarianten Funktor von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{E}$ definiert.

Übung 5. Sei $\mathcal{U}$ gegeben durch folgendes Tripel von Daten:

- $\text{Ob}(\mathcal{U})$ ist die Klasse der kleinen Kategorien, d.h.

$$\text{Ob}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ ist eine Kategorie, für welche } \text{Ob}(\mathcal{C}) \text{ eine Menge ist}\},$$

- $\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ist die Menge der kovarianten Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$,
- $\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \text{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ ist durch Nacheinanderausführen von Funktoren gegeben.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}$ eine Kategorie bildet.

Übung 6. (***) Finden Sie eine stetige Surjektion $S^1 \rightarrow S^2$. Können Sie für alle $m, n \in \mathbb{N}$ eine stetige Surjektion $S^m \rightarrow S^n$ finden?