Serie 8

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Zeigen Sie, dass es keinen Homöomorphismus $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus S^1$ mit $f(0,0) = (2,0)$ gibt.

Übung 2. Seien X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$.

(a) Sei β eine Schleife an x_0. Beschreiben Sie die Abbildung

$$\psi_\beta\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0), \quad [\alpha] \mapsto [(\beta^{-1}\alpha)\beta],$$

(vgl. Proposition 12.1 aus der Vorlesung vom 11. April) mit Begriffen aus der Gruppentheorie.

(b) Sei Y ein topologischer Raum, $y_0 \in Y$ und seien $f, g\colon X \to Y$ homotope Abbildungen mit $f(x_0) = g(x_0) = y_0$. Was können Sie über $f_*, g_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ aussagen?

Übung 3. $(\star)$ Sei $r > 0$ eine Konstante. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung, sodass $|f(v) - v| \leqslant r$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt. Zeigen Sie, dass f surjektiv ist.

Übung 4. Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X einfach zusammenhängend ist genau dann, wenn es für alle Paare von Punkten x, y in X eine eindeutige Homotopieklasse (rel Endpunkte) von Pfaden gibt, die diese beiden Punkte verbindet.

Übung 5. $(\star)$ Sei $(G, \cdot)$ eine topologische Gruppe mit neutralem Element e. Zeigen Sie, dass $\pi_1(G, e)$ kommutativ ist[1].

Übung 6. Sei X ein kontrahierbarer topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X einfach zusammenhängend ist. Dies folgt direkt aus der Invarianz der Fundamentalgruppe unter Homotopieäquivalenzen, kann aber in diesem Spezialfall auch direkt gezeigt werden.

Übung 7. Ein **Gruppoid** ist eine kleine Kategorie, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist. (Zur Erinnerung: eine Kategorie ist *klein*, wenn ihre Objekte eine Menge bilden, vgl. Serie 7, Übung 5).

(a) Prüfen Sie, dass für alle Gruppoide G und alle Objekte $X \in \mathrm{Ob}(G)$ die Morphismenmenge $G(X, X)$ eine Gruppe bildet. Finden Sie eine 1:1 Korrespondenz zwischen Gruppen und Gruppoiden mit nur einem Objekt.

(b) Seien G ein Gruppoid und $X, Y \in \mathrm{Ob}(G)$, so dass ein $f \in G(X, Y)$ existiert. Zeigen Sie, dass $G(X, X)$ und $G(Y, Y)$ isomorphe Gruppen sind.

(c) Sei X ein topologischer Raum. Wir definieren die Kategorie $\Pi_1(X)$, die als Objekte genau die Punkte in X hat (also $\mathrm{Ob}(\Pi_1(X)) = X$), und als Morphismenmenge $\Pi_1(x_0, x_1)$ die Wege von x_0 nach x_1 bis auf Homotopie rel. Endpunkte. Zeigen Sie, dass $\Pi_1(X)$ ein Gruppoid ist (das sogenannte *Fundamentalgruppoid*).

(d) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \Pi_1\colon \mathbf{Top} &\to \text{Kategorie der Gruppoide} \\ X &\mapsto \Pi_1(X). \end{aligned}$$

ein Funktor ist. (Die Kategorie der Gruppoide ist ähnlich wie in Serie 7, Übung 5 definiert).

(e) Wie können Sie $\pi_1(X, x_0)$ mit Hilfe von $\Pi_1(X)$ beschreiben?

Rätsel: Gegeben sei ein Bilderrahmen und ein Faden, der an seinen Enden am Bilderrahmen befestigt ist. In der Wand seien zwei Nägel eingeschlagen. Können Sie den Bilderahmen so an den zwei Nägeln aufhängen, dass er sicher herunterfällt, sobald Sie einen der beiden Nägel aus der Wand ziehen?

[1] Schreiben Sie die Verkettung $\alpha\beta$ zweier Schleifen α, β als die punktweise Multiplikation (=Gruppenoperation) zweier gut gewählter Schleifen.