# Serie 9

*Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!*

* * *

*Übung 1.* (⋆) In Serie 8, Übung 2 haben wir gesehen, dass für $X, Y$ zwei topologische Räume, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ und $f, g\colon X \to Y$ zwei homotope Abbildungen mit $f(x_0) = g(x_0) = y_0$ ein Weg $\beta$ mit $f_* = \psi_\beta \circ g_*$ existiert. Finden Sie Abbildungen $f, g$ wie in Serie 8, Übung 2 (b), sodass $f_* \neq g_*$ gilt[1].

*Übung 2.* Seien $H$ und $K$ Gruppen.

(a) Zeigen Sie: Falls alle Elemente von $H \setminus \{1\}$ und $K \setminus \{1\}$ unendliche Ordnung haben, dann haben auch alle Elemente von $(H * K) \setminus \{1\}$ unendliche Ordnung. Schliessen Sie daraus, dass $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ nicht isomorph zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ ist.

(b) Gibt es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von $H * K$ nach $H \times K$?

*Übung 3.* Sei $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ wie in der Vorlesung die freie Gruppe mit Erzeugern $a_1, \dots, a_n$, d.h. das freie Produkt von $n$ Kopien von $\mathbb{Z}$, wobei $a_i$ die 1 in der $i$-ten Kopie bezeichnet. Sind $r_1, \dots, r_k \in G$, so schreiben wir

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$$

für die Faktorgruppe $G/N$, wobei $N$ der Normalteiler von $G$ ist, der von allen Konjugierten der $r_1, \dots, r_k$ erzeugt ist. Zeigen Sie, dass die folgenden Gruppen jeweils isomorph sind.

(a) $\langle x, y \mid x^6, x^{15}, xyx^{-1}y^{-1} \rangle \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}$.

(b) $\langle x, y \mid x^2, y^3 \rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

(c) $\langle x, y \mid x^2y^3, x^3y^4 \rangle \cong \{1\}$.

(d) $\langle x, y \mid x^2y^{-3} \rangle \cong \langle a, b \mid abab^{-1}a^{-1}b^{-1} \rangle$.

*Übung 4.* Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe des projektiven Raums $\mathbb{RP}^2$ (vgl. Übung 4 von Serie 4).

*Übung 5.* (Fundamentalgruppe von Graphen.) (⋆) Sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph. Das heisst, dass $V$ eine endliche Menge ist (die Menge der sogenannten Ecken) und $E \subseteq V \times V$ (die Menge der sogenannten Kanten). Wir ordnen $G$ folgenden topologischen Raum $X$ zu: versehe $V$ und $E$ mit der diskreten Topologie, und setze $X = (V + (E \times [0,1]))/\sim$, wobei $\sim$ erzeugt ist durch $v_i \sim ((v_0, v_1), i)$ für alle $(v_0, v_1) \in E$ und $i \in \{0, 1\}$. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von $X$.

*Übung 6.* (⋆) Sei $X$ ein topologischer Raum, $k \geqslant 1$, und $\varphi\colon S^{k-1} \to X$ stetig. Wir sagen, $X \cup_\varphi D^k$ entsteht aus $X$ durch *Anheften einer $k$-Zelle*. Hier ist $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \leqslant 1\}$. (Siehe Kap. 8, S. 23 in den Aufschriften für die Definition einer Anheftung $\cup_\varphi$).

(a) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von $X \cup_\varphi D^k$ für $k = 2$.

(b) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von $X \cup_\varphi D^k$ für $k \geqslant 3$.

(c) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Konstruieren Sie einen topologischen Raum $X$ mit

$$\pi_1(X, x_0) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

[1] Die Homotopie $H$ zwischen $f$ und $g$ muss $y_0$ bewegen.