Serie 10

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Benutzen Sie den Satz von Seifert und van Kampen, um die folgenden Fundamentalgruppen zu bestimmen:

(a) $\pi_1(T^2, x_0)$, wobei T^2 den Torus bezeichnet,

(b) $\pi_1(K, x_0)$, wobei K die Kleinsche Flasche bezeichnet.

Übung 2. Sei $g \geqslant 2$. Wir definieren die *geschlossene, orientierbare Fläche* Σ_g *vom Geschlecht* g als Quotientenraum eines Polygons wie folgt. Sei P_{4g} ein (regelmäßiges) $4g$-seitiges Polygon, dessen Seiten im Uhrzeigersinn mit 0 bis $4g-1$ nummeriert seien. Dann ist Σ_g die Fläche, die man aus P_{4g} erhält, indem man für alle $S = 0, 4, 8, \ldots, 4(g-1)$ und für alle $S = 1, 5, 9, \ldots, 4(g-1)+1$ die im Uhrzeigersinn parametrisierte Seite S mit der im Gegenuhrzeigersinn parametrisierten Seite $S+2$ identifiziert.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Seifert und van Kampen die Fundamentalgruppe $\pi_1(\Sigma_g)$.

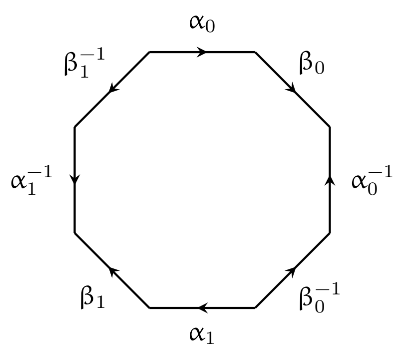

Abbildung 1: Beispiel für die Konstruktion von Σ_g durch Identifikation der Seiten eines $4g$-seitigen Polygons im Fall $g = 2$.

Übung 3. $(\star)$

(a) Seien (X_1, x_1) und (X_2, x_2) zwei punktierte topologische Räume, die kontrahierbare offene Umgebungen $U_i \subseteq X_i$ von x_i besitzen für $i = 1, 2$. Finden Sie einen natürlichen Isomorphismus

$$\pi_1(X_1, x_1) * \pi_1(X_2, x_2) \cong \pi_1(X_1 \vee X_2, x_1 = x_2).$$

(b) Sei wie in der Vorlesung

$$H := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - \tfrac{1}{n})^2 + x_2^2 = \tfrac{1}{n^2} \right\}$$

der Hawaiianische Ohrring. Zeigen Sie, dass die natürliche Abbildung wie in (a)

$$\pi_1(H, 0) * \pi_1(H, 0) \to \pi_1(H \vee H, 0 = 0)$$

kein Isomorphismus ist.

Übung 4. Sei X die Menge aller Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Man betrachte die folgenden Topologien auf X: Produkttopologie; diskrete Topologie; indiskrete Topologie; von

$$B_{\varepsilon,f} = \{g \in X \mid \forall x \in \mathbb{R} : |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}$$

für alle $\varepsilon > 0, f \in X$ erzeugte Topologie; von

$$C_{\varepsilon,f,a,b} = \{g \in X \mid \forall x \in [a,b] : |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}$$

für alle $\varepsilon > 0, f \in X$ und $a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b$ erzeugte Topologie.

(a) Ordnen Sie dies Topologien nach Feinheit.

(b) Für jede dieser Topologien beschreibe man, was es für eine Folge $f_1, f_2, \ldots \in X$ bedeutet, gegen $g \in X$ zu konvergieren.

Übung 5. $(\star)$ Wir betrachten $\{0,1\}$ mit der diskreten Topologie. Wir haben in Serie 5, Übung 6 gesehen, dass

$$X \coloneqq \{0,1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$$

(also der Raum aller Funktionen von der Potenzmenge der natürlichen Zahlen nach $\{0,1\}$, mit der Produkttopologie) kompakt ist, weil $\{0,1\}$ kompakt ist. Zeigen Sie jedoch, dass es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X ohne konvergente Teilfolgen gibt.

Übung 6. $(\star\star)$ Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ ein Homöomorphismus $f\colon [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ mit $f(x) = y$ existiert, d.h. scheinbare „Randpunkte" wie z.B. die „Ecke" $\{0\}_{n\in\mathbb{N}}$ unterscheiden sich nicht qualitativ von „inneren Punkten" wie $\{\frac{1}{2}\}_{n\in\mathbb{N}}$.