Serie 11

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Welche der Funktionenräume von Serie 10, Aufgabe 4 sind metrisierbar? In welcher dieser Funktionenräume ist die Menge der stetigen Funktionen abgeschlossen?

Übung 2.

(a) Ein topologischer Raum X heißt *separabel*, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält (d.h. es existiert eine abzählbare Teilmenge $A \subseteq X$ mit $\overline{A} = X$). Zeigen Sie, dass jeder topologische Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, separabel ist.

(b) Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie: ist X metrisierbar und separabel, so ist X zweitabzählbar.

Übung 3.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ mit der kofiniten Topologie nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

(b) Zeigen Sie auch, dass $\mathbb{R}$ mit der koabzählbaren Topologie nicht erstabzählbar ist. Hier ist eine Menge $U \subset \mathbb{R}$ offen bezüglich der koabzählbaren Topologie, falls U leer ist oder höchstens abzählbares Komplement hat.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung von $\mathbb{R}$ mit koabzählbarer Topologie nach $\mathbb{R}$ mit natürlicher Topologie, die x auf x schickt, folgenstetig ist, aber nicht stetig.

Übung 4.($\star$) Sei X eine zusammenhängende kompakte eindimensionale Mannigfaltigkeit. Wie folgt beweise man, dass X homöomorph zu S^1 ist:

(a) Zeigen Sie, dass es eine endliche Überdeckung $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ durch offene Mengen $U_i \subseteq X$ mit Homöomorphismen $\varphi_i \colon U_i \to \mathbb{R}$ gibt.

(b) Man nehme im folgenden an, dass n minimal ist. Man zeige, dass $n \geqslant 2$.

(c) Zeigen Sie, dass ein $j \in \{2, \ldots, n\}$ mit $U_1 \cap U_j \neq \varnothing$, $U_1 \setminus U_j \neq \varnothing$ und $U_j \setminus U_1 \neq \varnothing$ existiert.

(d) Sei o.B.d.A. $j = 2$. Sei Z eine Zusammenhangskomponente von $U_1 \cap U_2$. Zeigen Sie, dass $\varphi_1(Z)$ entweder gleich $(-\infty, a)$ oder gleich (b, ∞) ist, für $a, b \in \mathbb{R}$. Folgern Sie, dass $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ entweder gleich $(-\infty, a)$ (Fall 1), oder gleich (b, ∞) (Fall 2), oder gleich $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ (Fall 3) ist, für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

(e) In den ersten beiden Fälle aus (d) ist $U_1 \cup U_2$ ebenfalls zu $\mathbb{R}$ homöomorph, was gegen die Minimalität von n verstösst.

(f) Im dritten Fall aus (d) ist $U_1 \cup U_2$ zu S^1 homöomorph.

(g) Da S^1 kompakt ist, ist $U_1 \cup U_2 \subseteq X$ abgeschlossen; es folgt $n = 2$ und damit $X \cong S^1$.

Übung 5. Unter welchen Konstruktionen (wie z.B. Unterräume, feinere Topologie, abzählbare Produkte, ...) bleiben Erst- und Zweitabzählbarkeit jeweils erhalten?