Serie 12

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Sei X ein zusammenhängender normaler Hausdorffraum mit mindestens zwei Punkten. Zeigen Sie, dass X überabzählbar ist.

Übung 2. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass die Funktion $\delta\colon X \to [0, \infty)$ gegeben durch

$$x \mapsto d(x, A) \coloneqq \inf_{y \in A} |d(x, y)|$$

stetig ist und dass $\delta(x) > 0$ für alle $x \notin A$ gilt. Wo gibt es ein Problem, wenn A nicht abgeschlossen ist?

(b) Zeigen Sie das Urysohnsche Lemma für den metrischen Raum X ohne auf die Sätze oder Ideen der Vorlesungen aus der Woche 12 zu verweisen.

Übung 3.

(a) Ein topologischer Raum heisst *lokalkompakt*, falls jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat. Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Zeigen Sie, dass für alle $x \in X$ und abgeschlossene $A \subset X$ mit $x \notin A$ offene disjunkte Mengen $U, V \subset X$ existieren, sodass $x \in U$ und $A \subset V$.

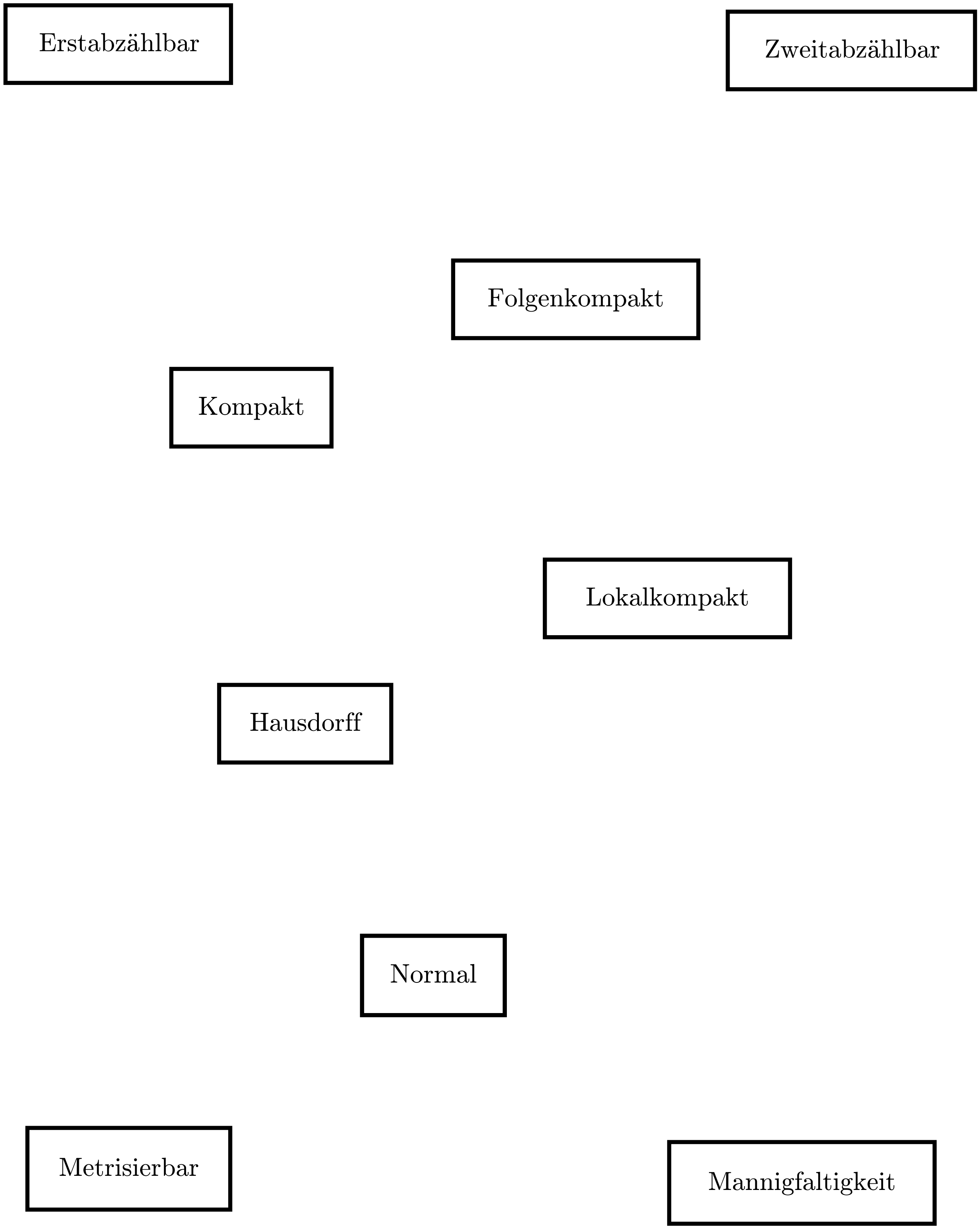
(b) Zeigen Sie, dass ein kompakter Hausdorffraum normal ist.

Übung 4. $(\star)$ Wir wollen zeigen, dass wir kompakte Mannigfaltigkeiten in „schöne" topologische Räume einbetten können. Zur Erinnerung: Mit *Einbettung* meinen wir hier Homöomorphismus aufs Bild. Ein Korollar der folgenden Aussage ist auch, dass alle kompakten Mannigfaltigkeiten metrisierbar sind.

Sei M eine beliebige kompakte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass M in $\mathbb{R}^N$ eingebettet werden kann.

Übung 5. Zeigen Sie, dass eine Überlagerung (mit höchstens abzählbaren Fasern) einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit wieder eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Übung 6. Man zeichne auf der Rückseite alle bekannten Implikationen ein (auch diejenigen der Form $A \wedge B \Rightarrow C$ für Eigenschaften A, B, C).


Erstabzählbar
Zweitabzählbar
Folgenkompakt
Kompakt
Lokalkompakt
Hausdorff
Normal
Metrisierbar
Mannigfaltigkeit