Serie 13

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Abbildung p ist ein lokaler Homöomorphismus (d.h. jeder Punkt in Y hat eine offene Umgebung V sodass $p(V) \subset X$ offen und $p|_V$ ein Homöomorphismus aufs Bild ist).

(b) Falls $p^{-1}(x)$ für alle $x \in X$ einelementig ist, dann ist p ein Homöomorphismus.

Übung 2. Sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung, $A \subseteq X$ eine Teilmenge mit der Unterraumtopologie und $B \coloneqq p^{-1}(A)$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $p|_B\colon B \to A$ eine Überlagerung ist.

Übung 3.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $p_n\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$, eine Überlagerung ist.

(b) ($\star$) Sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom, das nicht konstant ist. Zeigen Sie, dass man Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ finden kann, so dass die Abbildung

$$P\colon \mathbb{C} \setminus P^{-1}(\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}) \to \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$$

eine Überlagerung ist.

Übung 4. ($\star$) Seien X, Y, Z topologische Räume und seien $p\colon X \to Y$ und $q\colon Y \to Z$ Überlagerungen. Weiter sei $q^{-1}(z)$ für alle $z \in Z$ eine endliche Menge. Zeigen Sie, dass $q \circ p\colon X \to Z$ eine Überlagerung ist.

Übung 5. Sei $f\colon S^1 \to S^1$,

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{wenn } \mathrm{Im}(z) \geqslant 0 \\ \bar{z}^2 & \text{wenn } \mathrm{Im}(z) \leqslant 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: die Abbildung f ist stetig, für alle $z \in S^1$ hat $f^{-1}(z)$ zwei Elemente, und jedes $z \in S^1$ hat eine offene Umgebung U sodass $f^{-1}(U)$ homöomorph zu $U + U$ ist; aber f ist keine Überlagerung.

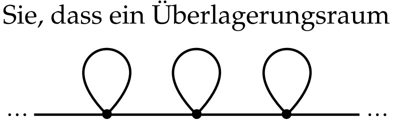
Übung 6. Satz 17.6 aus der Vorlesung besagt: operiert eine Gruppe G frei und eigentlich diskontinuierlich auf einem Raum Y (d.h. jedes $y \in Y$ hat eine offene Umgebung U sodass für alle $g \in G$ gilt $U \cap gU = \varnothing$), und ist Y einfach zusammenhängend, so folgt $\pi_1(Y/G, x_0) \cong G$. Benutzen Sie diesen Satz, um die Fundamentalgruppen der folgenden Räume zu bestimmen:

(a) $\mathbb{R}P^2$,

(b) $T^2 = S^1 \times S^1$,

(c) ($\star$) die Kleinsche Flasche.

Übung 7. Ähnlich wie in Serie 9, Übung 5 betrachten wir Graphen – diesmal allerdings auch unendliche. Seien V, E diskrete Räume, und $a, b\colon E \to V$ Funktionen. Dann heisst der topologische Raum $X = (V + (E \times [0,1]))/\sim$ mit $\sim$ erzeugt von $(e, 0) \sim a(e)$ und $(e, 1) \sim b(e)$ ein *Graph*. Die Punkte $v \in V \subset X$ heissen *Ecken*, und die Unterräume $e \times [0,1]/\sim \subset X$ für $e \in E$ *Kanten*. Zeigen Sie, dass ein Überlagerungsraum eines Graphen wieder ein Graph ist.



Beispiel eines unendlichen Graphen

Die folgenden Übungen benötigen Stoff aus der letzten Vorlesung von Montag, dem 26.5.

Übung 8. Sei $Z \subseteq \mathbb{C}^*$ offen und zusammenhängend, $z_0 \in Z$ und $i\colon Z \to \mathbb{C}^*$ die Inklusion. Zeigen Sie, dass sich genau dann ein stetiger Logarithmus auf Z definieren lässt, wenn $i_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq \pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)$ die triviale Gruppe ist. Hierbei sei ein Logarithmus auf Z eine Abbildung $\log\colon Z \to \mathbb{C}$, welche $e^{\log(z)} = z$ für alle $z \in Z$ erfüllt.

Übung 9. Bestimmen Sie zwei Überlagerungen $p\colon X \to T^2$ und $p'\colon X' \to T^2$ des Torus T^2, sodass $p'\colon X \to T^2$ und $p'\colon X' \to T^2$ die gleiche (endliche) Anzahl von Blättern haben, aber sodass es keine Homöomorphismen $\phi\colon X \to X'$ und $\psi\colon T^2 \to T^2$ gibt mit $p' \circ \phi = \psi \circ p$.

Übung 10. ~~Sei X ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum mit endlicher Fundamentalgruppe. Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f\colon X \to S^1$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist.~~ *Diese Aufgabe ist gestrichen. Zur Lösung bräuchte man das Hochhebbarkeitskriterium (siehe z.B. Jänich S. 174 oder Hatcher Proposition 1.33. S. 61, welches wir in der Vorlesung nicht mehr betrachtet haben.*

Übung 11. Beschreiben Sie bis auf Isomorphie alle Überlagerungen $p\colon Y \to X$ von X mit wegzusammenhängendem Y, wobei

(a) $X = S^1$,

(b) $X = S^1 \times S^2$,

(c) $X = S^1 \vee S^2$.

Übung 12.

(a) ($\star$) Finden Sie eine Überlagerung $p\colon Y \to S^1 \vee S^1$, sodass $\pi_1(Y, y_0)$ unendlich erzeugt ist.

(b) ($\star$) Finden Sie bis auf Isomorphie alle 2-blättrigen Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$.

(c) ($\star\star$) Finden Sie bis auf Isomorphie alle 3-blättrigen Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$.