Serie 1: Lösung

Übung 1. Sei $X = [-1, 1]$ als Unterraum von $\mathbb{R}$ mit der Unterraumtopologie. Entscheiden Sie für jede der folgenden Mengen in X ob sie offen, abgeschlossen, beides, oder keines von beidem ist:

$$\{x \in X \mid \tfrac{1}{2} < |x| < 1\},$$
$$\{x \in X \mid \tfrac{1}{2} < |x| \leqslant 1\},$$
$$\{x \in X \mid \tfrac{1}{2} \leqslant |x| < 1\},$$
$$\{x \in X \mid \tfrac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 1\}.$$

<u>*Lösung für Übung 1:*</u> Für alle Mengen entscheiden wir jeweils für die Menge und ihr Komplement, ob sie offen sind. Das ist genug um zu entscheiden, ob die Mengen offen, abgeschlossen, beides, oder keines von beidem sind.

(a) Die Menge $M_1 \coloneqq \{x \in X \mid 1/2 < |x| < 1\}$ ist offen, weil sie auch offen in $\mathbb{R}$ ist. Das Komplement

$$K_1 = \{-1, 1\} \cup [-1/2, 1/2] \subset X$$

ist nicht offen, weil alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}$, die 1 enthalten, auch $1 - \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ klein genug enthalten.

(b) Die Menge $M_2 \coloneqq \{x \in X \mid 1/2 < |x| \leqslant 1\}$ ist auch offen, weil

$$M_2 = X \cap \left(\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \right).$$

Das Komplement

$$K_2 \coloneqq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset X$$

ist nicht offen, weil allen offen Mengen $U \subset \mathbb{R}$, die $1/2$ enthalten, auch $1/2 + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ klein genug enthalten.

(c) Die Menge $M_3 \coloneqq \{x \in X \mid 1/2 \leqslant |x| < 1\}$ ist nicht offen, aus dem gleichen Grund wie vorher: alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}$, die $1/2$ enthalten, enthalten auch $1/2 - \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ klein genug. Aus dem gleichen Grund, ist das Komplement K_3 auch nicht offen.

(d) Die Menge $M_4 \coloneqq \{x \in X \mid 1/2 \leqslant |x| \leqslant 1\}$ ist abgeschlossen, da sie auch abgeschlossen in $\mathbb{R}$ ist. Aber M_4 ist nicht offen, aus dem Gleichen Grund wie M_3.

Übung 2. Sei X eine Menge.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{O}_{\text{cof}} \coloneqq \{U \subseteq X \mid X \backslash U \text{ ist endlich oder } U \text{ ist die leere Menge}\}$$

eine Topologie auf X ist. Man nennt $\mathcal{O}_{\text{cof}}$ die kofinite Topologie.

(b) Für welche Mengen X bildet die Menge aller endlicher Teilmengen eine Topologie?

<u>*Lösung für Übung 2:*</u>

(a) Offensichtlich sind $\emptyset$ und X in $\mathcal{O}_{\text{cof}}$ enthalten. Seien nun $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_{\text{cof}}$. Falls $U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$ ist, so ist $U_1 \cap U_2 = \emptyset \in \mathcal{O}_{\text{cof}}$. Sei also $U_1 \neq \emptyset \neq U_2$. Dann gilt nach den De Morganschen Gesetzen, dass

$$X \backslash (U_1 \cap U_2) = (U_1 \cap U_2)^c = U_1^c \cup U_2^c$$

als Vereinigung zweier endlicher Mengen ebenfalls endlich ist. Also ist $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}_{\text{cof}}$. Sei nun $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}_{\text{cof}}$ beliebig. Wir behaupten, dass $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \in \mathcal{O}_{\text{cof}}$ gilt. Falls die Kardinalität von $\mathcal{S}$ kleiner als 2 ist, so ist nichts zu zeigen. Sei also $|\mathcal{S}| \geqslant 2$. Dann gibt es ein $U_0 \neq \emptyset$ in $\mathcal{S}$. Folglich ist

$$X \backslash \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \subseteq X \backslash U_0$$

endlich und somit ist $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U$ in $\mathcal{O}_{\text{cof}}$ enthalten.

(b) Dies ist nur der Fall für endliche Mengen X.

Übung 3. Sei X eine Menge.

(a) Seien d_1 und d_2 Metriken auf X, so dass es eine reelle Zahl $a > 0$ gibt mit

$$d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y)^a$$

für alle $(x, y) \in X \times X$. Beweisen Sie, dass d_2 eine feinere Topologie als d_1 auf X induziert. Nehmen Sie jetzt zusätzlich an, dass es eine reelle Zahl $b > 0$ gibt mit

$$d_2(x, y) \leqslant d_1(x, y)^b$$

für alle $(x, y) \in X \times X$. Beweisen Sie, dass d_1 und d_2 dieselbe Topologie auf X induzieren.

(b) Sei d eine Metrik auf X. Zeigen Sie, dass

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

eine Metrik auf X definiert. Zeigen Sie, dass δ und d dieselben Topologien definieren. Zeigen Sie $\delta(x, y) \leqslant 1$ für alle $(x, y) \in X \times X$. (Dies demonstriert, dass man in jedem metrischen Raum die Metrik so ändern kann, dass zwei beliebige Punkte den Abstand $\leqslant 1$ haben, ohne die Topologie zu ändern.)

Lösung für Übung 3:

(a) Sei $\mathcal{T}_i$ die Topologie auf X, die von d_i induziert ist. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Sei $U \subset X$ eine offene Menge bezüglich $\mathcal{T}_1$ und sei x ein Punkt in X, der in U liegt. Da U offen ist, gibt es ein $r \in \mathbb{R}$ mit

$$B_{d_1}(x, r) \subset U.$$

Aus der Ungleichung folgt

$$B_{d_2}(x, r^{1/a}) \subset U.$$

Dies gilt für jeden Punkt $x \in U$, also ist U auch offen bezüglich $\mathcal{T}_2$. Das heisst, $\mathcal{T}_2$ ist feiner als $\mathcal{T}_1$. Wenn die zweite Ungleichung gilt, so ist sowohl $\mathcal{T}_2$ feiner als $\mathcal{T}_1$, als auch $\mathcal{T}_1$ feiner als $\mathcal{T}_2$. Das heisst, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

(b) Es ist klar, dass δ symmetrisch und positiv definit ist. Es bleibt noch die Dreiecksungleichung zu zeigen. Als erstes zeigen wir, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$

$$1 + \frac{1}{1 + a + b} \geqslant \frac{1}{1 + a} + \frac{1}{1 + b}. \tag{1}$$

Das entspricht,

$$\begin{gathered} \frac{1 + a + b + 1}{1 + a + b} \geqslant \frac{1 + a + b + 1}{(1 + a) \cdot (1 + b)} \\ \Leftrightarrow (1 + a)(1 + b) \geqslant (1 + a + b) \\ \Leftrightarrow 1 + a + b + ab \geqslant 1 + a + b \\ \Leftrightarrow ab \geqslant 0. \end{gathered}$$

Aber dies gilt, da a, b nicht-negativ sind. Seien $x, y, z \in X$, dann sind die folgenden Ungleichungen äquivalent.

$$\begin{gathered} \delta(x, y) + \delta(y, z) \geqslant \delta(x, z) \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1 + d(x, y)} + 1 - \frac{1}{1 + d(y, z)} \geqslant 1 - \frac{1}{1 + d(x, z)} \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{1 + d(x, z)} \geqslant \frac{1}{1 + d(x, y)} + \frac{1}{1 + d(y, z)} \end{gathered}$$

Unter Verwendung von (1), und weil d eine Metrik ist, folgt

$$1+\frac{1}{1+d(x,z)} \geqslant 1+\frac{1}{1+d(x,y)+d(y,z)} \geqslant \frac{1}{1+d(x,y)}+\frac{1}{1+d(y,z)}.$$

Wir beweisen jetzt, dass d und δ die selbe Topologie induzieren. Wir haben $B_d(x,r) = B_\delta(x,\alpha(r))$, für $\alpha(t) = t/(1+t)$. Also ist jeder d-Ball auch ein δ-Ball, und somit offen bezüglich δ. Umgekehrt ist $B_\delta(x,r)$ ganz X falls $r \geqslant 1$, und gleich $B_d(x,\alpha^{-1}(r))$ falls $r < 1$. (Beachte, dass α eine bijektive Funktion $[0,1) \to [0,\infty)$ ist, mit Umkehrfunktion $\alpha^{-1}(t) = t/(1-t)$). Folglich ist auch jeder δ-Ball offen bezüglich d. Das heisst, dass d und δ dieselbe Topologie induzieren.

Vergleiche diese Aufgabe auch mit Exercise 9.8 im Analysis II Script von Joaquim Serra: `https://metaphor.ethz.ch/x/2024/fs/401-1262-07L/notes/Analysis_II_Script_v1.pdf`

Übung 4. Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine Menge.

(a) Zeigen Sie, dass das Innere A° die grösste in A enthaltene offene Menge ist, d.h. A° ist offen und für jede offene Menge $B \subseteq A$ gilt $B \subseteq A^\circ$.

(b) Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ von A die kleinste abgeschlossene Menge ist, die A enthält, d.h. $\overline{A}$ ist abgeschlossen und für jede abgeschlossene Menge B mit $B \supseteq A$ gilt $B \supseteq \overline{A}$.

(c) Zeigen Sie, dass das Innere des Rands von A leer ist, d.h. $(\partial A)^\circ = \emptyset$.

Lösung für Übung 4:

(a) Für alle $x \in A^\circ$, gibt es eine offene Menge U_x mit $x \in U_x \subset A$. Es folgt $U_x \subset A^\circ$. Also,

$$A^\circ = \bigcup_{x \in A^\circ} U_x.$$

Das zeigt, dass A° eine offene Menge ist.

Sei $B \subset A$ eine offene Menge und $x \in B$. Dann $x \in B \subset A$, also $x \in A^\circ$. Das heisst, dass $B \subset A^\circ$.

(b) Für alle $x \notin \overline{A}$, gibt es eine offene Menge U_x disjunkt von A, die x enthält. Also $U_x \cap \overline{A} = \emptyset$ und

$$X \backslash \overline{A} = \bigcup_{x \notin \overline{A}} U_x.$$

Das zeigt, dass $\overline{A}$ eine abgeschlossene Menge ist.

Seien $B \supset A$ eine abgeschlossene Menge und $x \notin B$. Dann $x \in X\backslash B \subset X \backslash A$, also ist x ein äusserer Punkt von A, folglich $x \notin \overline{A}$. Das heisst, dass $B \supset \overline{A}$.

(c) Diese Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Man sieht, dass der Rand von $\mathbb{Q}$ gleich $\mathbb{R}$ ist. Aber das Innere von $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$, und nicht leer.

Übung 5.($\star$) Sei $\mathbb{Z}$ die Menge aller ganzen Zahlen und

$$\sigma = \{a\mathbb{Z} + b \mid a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ \ b \in \mathbb{Z}\}$$

eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

(a) Zeigen Sie, dass σ eine Basis für eine Topologie $\mathcal{O}$ ist und dass alle Elemente von σ bezüglich $\mathcal{O}$ abgeschlossen sind.

(b) Zeigen Sie

$$\mathbb{Z}\backslash\{-1,1\} = \bigcup_{p \text{ prim}} p\mathbb{Z}.$$

(c) Folgern Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Lösung für Übung 5:

(a) Seien $a\mathbb{Z}+b$ und $a'\mathbb{Z}+b'$ zwei Mengen in σ. Der Chinesische Restsatz sagt uns, dass der Schnitt dieser beiden Mengen entweder leer ist, oder selbst wieder von der Form $a''\mathbb{Z}+b''$ (falls $b \equiv b' \pmod{\operatorname{ggT}(a,a')}$, so ist $a'' = \operatorname{kgV}(a,a')$, andernfalls ist der Schnitt leer – aber das ist für die Aufgabe nicht relevant).

Also ist der Durchschnitt von endlich vielen Mengen aus σ wieder eine Vereinigung von Mengen aus σ; ausserdem ist $\mathbb{Z} = 1\mathbb{Z}+0$ selbst in σ. Es folgt, dass σ eine Basis für eine Topologie $\mathcal{O}$ ist.

Seien $a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ und $b \in \mathbb{Z}$. Das Komplement von $a\mathbb{Z}+b$ ist gleich

$$K_{a,b} \coloneqq \{n \in \mathbb{Z} \mid n \not\equiv b \pmod{a}\} = \bigcup_{b'=b+1,\dots,b+a-1} (a\mathbb{Z}+b')\,.$$

$K_{a,b}$ ist also die Vereinigung offener Menge. Also ist $a\mathbb{Z}+b$ abgeschlossen.

(b) Wir wissen, dass es für alle Zahlen $z \neq \pm 1$ eine Primzahl p mit $p \mid z$ gibt. Die Gleichung

$$\mathbb{Z}\backslash\{-1,1\} = \bigcup_{p \text{ prim}} p\mathbb{Z}$$

folgt.

(c) Als erstes zeigen wir, dass alle nicht-leeren offenen Mengen unendlich sind. Dies folgt, weil jede nicht-leere offene Menge Vereinigung von Mengen aus der Basis σ ist, und jede Menge in σ unendlich ist.

Gäbe es nicht unendlich viele Primzahlen, dann wäre $\mathbb{Z}\backslash\{-1,1\}$ die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen (hier verwenden wir (a) und (b)). Dann wäre $\mathbb{Z}\backslash\{-1,1\}$ abgeschlossen und $\{-1,1\}$ offen; aber $\{-1,1\}$ ist nicht unendlich, das ist ein Widerspruch!

Übung 6. Sei $\mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Folgen reeller Zahlen. Sei $\mathcal{O}$ die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (das Produkt hat $\mathbb{N}$ viele Faktoren, und jeder Faktor ist $\mathbb{R}$).

(a) Sei

$$d((x_n),(y_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\min(|x_n-y_n|,1)}{2^n},$$

für zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass d wohldefiniert[3] ist und eine Metrik auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.

(b) ($\star\star$) Zeigen Sie, dass die von der Metrik d induzierte Topologie gleich $\mathcal{O}$ ist[4].

(c) Beschreiben Sie eine Metrik e auf $\coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$, welche die Summentopologie der $\mathbb{N}$ Kopien von $\mathbb{R}$ induziert[5].

Lösung für Übung 6:

(a) Die Reihe ist absolut konvergent, weil

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{\min(|x_n-y_n|,1)}{2^n}\right| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1 < +\infty.$$

Wenn $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ nicht gleich sind, sehen wir, dass es $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \neq y_n$ gibt. Dann gilt $d((x_n),(y_n)) > 0$, also d ist positiv definit. Seien $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ und $(z_n)_n$ drei Folgen, dann

$$d((x_n),(z_n)) = \sum \frac{\min(|x_n-z_n|,1)}{2^n} \leqslant \sum \frac{\min(|x_n-y_n|+|y_n-z_n|,1)}{2^n} \leqslant d((x_n),(y_n)) + d((y_n),(z_n)).$$

Das ist die Dreiecksungleichung.

(b) (basierend auf der Lösung von Joris Liebing) Sei zuerst U bezüglich d offen, wir zeigen, dass U auch in der Produkttopologie von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ liegt. Sei dazu $(x_n)_n \in U$. Wegen Offenheit existiert

$$B_d((x_n)_n, r) \coloneqq \left\{ (y_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\min(|x_n - y_n|, 1)}{2^n} < r \right\} \subseteq U.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $r = 1/2^k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Definiere nun:

$$U_x \coloneqq B(x_1, 2^{-k-1}) \times B(x_2, 2^{-k-1}) \times \cdots \times B(x_{k+1}, 2^{-k-1}) \times \mathbb{R} \times \cdots$$

Dann ist U_x offen bezüglich der Produkttopologie und $U_x \subseteq B_d((x_n)_n, r)$, was eine einfache Abschätzung zeigt. Da $(x_n)_n \in U$ beliebig, folgt die Offenheit von U in der Produkttopologie.

Sei nun U in der Produkttopologie. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist

$$U = U_1 \times \ldots \times U_k \times \mathbb{R} \times \cdots$$

Sei nun $(x_n)_n \in U$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit finden wir $r = 1/2^\ell > 0$, sodass

$$V \coloneqq B(x_1, r) \times \cdots \times B(x_k, r) \times \mathbb{R} \times \cdots \subseteq U$$

Man nehme nun die in der von d induzierten Topologie offene Menge

$$U_x \coloneqq B_d\left((x_n)_n, \frac{1}{2^{\ell+k}}\right).$$

Es folgt, dass, wenn y darin enthalten ist, gelten muss, dass

$$|y_1 - x_1| < \frac{1}{2^\ell}, \ldots, |y_k - x_k| < \frac{1}{2^\ell}$$

Es folgt also $U_x \subseteq V$. Aus der Beliebigkeit von $(x_n)_n$ erhalten wir also, dass U auch bezüglich d offen ist.

(c) Wir definieren d wie folgt:

$$d\colon \coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \times \coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \min(d_{\mathbb{R}}(x,y), 1) & \text{wenn } x \text{ und } y \text{ in der gleicher Kopie von } \mathbb{R} \text{ sind,} \\ 1 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Es ist klar, dass d positiv definit ist. Wir beweisen die Dreiecksungleichung. Seien x, y und z drei Punkte in $\coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$. Wir bemerken, dass d stets kleiner gleich 1 ist. Wir sollen zeigen, dass

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

Wenn x, y oder y, z nicht in der gleicher Kopie von $\mathbb{R}$ sind, dann folgt die Ungleichung, weil die linke Seite der Ungleichung stets kleiner gleich als 1 ist. Andernfalls sind x, y, z in der gleicher Kopie von $\mathbb{R}$. Dann folgt die Ungleichung, weil allen Punkte in die gleicher Kopie von $\mathbb{R}$ sind, also ist es die Dreiecksungleichung für die Metrik $\min(d_{\mathbb{R}}(x, y), 1)$ auf $\mathbb{R}$.

Ein Ball von Radius kleiner als 1 bezüglich d ist ein Ball in einer der Kopien von $\mathbb{R}$. Daraus folgt, dass die Topologie von d die Summentopologie ist.

* * *