Serie 2: Lösung

Übung 1. Sei X eine Menge und sei Y ein topologischer Raum. Sei $f\colon X \to Y$ eine beliebige Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{O}$ der Teilmengen von X der Form $U = f^{-1}(V)$ für offene Mengen $V \subseteq Y$ eine Topologie auf X ist. Diese heisst *Initialtopologie* bezüglich f.

(b) Zeigen Sie, dass $f\colon (X, \mathcal{O}) \to Y$ stetig ist.

(c) Sei X' eine Menge mit Topologie $\mathcal{O}'$. Angenommen, alle Funktionen $f\colon X' \to Y'$ für alle topologischen Räume Y' sind stetig. Was können Sie über $\mathcal{O}'$ sagen?

(d) Sei X' eine Menge mit Topologie $\mathcal{O}'$. Angenommen, alle Funktionen $f\colon Y' \to X'$ für alle topologischen Räume Y' sind stetig. Was können Sie über $\mathcal{O}'$ sagen?

Lösung für Übung 1:

(a) Als erstes sehen wir, dass $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ und $X = f^{-1}(Y)$ in $\mathcal{O}$ liegen. Seien $U_i = f^{-1}(V_i)$ für offene Menge V_i und $i \in I$ eine Familie von Mengen in $\mathcal{O}$. Dann,

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right)$$

und da $\bigcup_{i\in I} V_i$ eine offene Menge ist, liegt $\bigcup_{i\in I} U_i$ auch in $\mathcal{O}$. Wir haben auch

$$U_i \cap U_j = f^{-1}(V_i \cap V_j),$$

also liegt $U_i \cap U_j$ auch in $\mathcal{O}$. Wir haben gezeigt, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X ist.

(b) Die Funktion $f\colon (X, \mathcal{O}) \to Y$ ist stetig, wenn für alle offenen Mengen V bezüglich der Topologie von Y $f^{-1}(V)$ offen ist. Das ist unsere Definition für $\mathcal{O}$ gewesen!

(c) Sei der topologische Raum Y' die Menge X' mit der diskreten Topologie und f schicke x auf x. Alle Teilmengen $V \subset X'$ sind offen bezüglich der diskreten Topologie, also ist $V = f^{-1}(V)$ auch offen bezüglich $\mathcal{O}'$, weil f stetig ist. Es folgt, dass $\mathcal{O}'$ auch die diskrete Topologie ist. Umgekehrt ist auch klar, wenn $\mathcal{O}'$ die diskrete Topologie ist, dass alle Funktionen auf X' stetig sind.

(d) Sei der topologische Raum Y' die Menge X' mit der indiskreten Topologie und f schicke x auf x. Für alle Teilmengen $V \in \mathcal{O}'$ soll $V = f^{-1}(V)$ offen bezüglich Y' sein. Das heisst $V = \emptyset$ oder X'. Also ist $\mathcal{O}'$ die indiskrete Topologie. Es ist auch klar, wenn $\mathcal{O}'$ die indiskrete Topologie ist, dass alle Funktion nach X' stetig sind.

Übung 2. Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass es für jede Menge von Teilmengen $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ genau eine Topologie $\mathcal{O}_S$ auf X gibt, sodass S eine Subbasis von $\mathcal{O}_S$ ist. Zeigen Sie weiter, dass dies die kleinste (auch gröbste genannt) Topologie von X ist, die S enthält, d.h. ist $\mathcal{O}$ eine Topologie von X mit $S \subseteq \mathcal{O}$, dann gilt $\mathcal{O}_S \subseteq \mathcal{O}$.

Lösung für Übung 2: Sei $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir bauen unsere Topologie $\mathcal{O}_S$ wie folgt. Wir definieren $\mathcal{O}_S \subseteq \mathcal{P}(X)$ als die Teilmenge aller

$$U := \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J_i} U^i_j$$

für alle Familien $(U^i_j)_{j\in J_i, i\in I}$ von Mengen in S mit J_i endlich für alle $i \in I$. Vorerst sehen wir, dass $\bigcap_{j\in J_i} U^i_j$ offen sein soll, da J ist endlich. Da $\bigcap_{j\in J} U^i_j$ ist offen für alle $i \in I$, die Menge U soll auch offen sein. Dies zeigt, dass eine Topologie, die S enthält, auch $\mathcal{O}_S$ enthält. Somit ist $\mathcal{O}_S$ die kleinste Topologie von X ist, die S enthält, sofern $\mathcal{O}_S$ eine Topologie ist. Wir prüfen jetzt, dass $\mathcal{O}_S$ eine Topologie ist. Sei I eine einelementige Menge und J_i die leere Menge, dann

$$\bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J_i} U^i_j = X,$$

also liegt X in $\mathcal{O}_S$. Sei jetzt I die leere Menge, dann

$$\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J_i} U_j^i = \emptyset,$$

also liegt $\emptyset$ auch in $\mathcal{O}_S$. Seien zwei Elemente von $\mathcal{O}_S$ gegeben:

$$U \coloneqq \bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J_i} U_j^i, \quad U' \coloneqq \bigcup_{i'\in I'}\bigcap_{j\in J_{i'}} U_j^{i'}.$$

Wir definieren $X_i = \bigcap_{j\in J_i} U_j^i$ und $X_{i'} = \bigcap_{j\in J_{i'}} U_j^{i'}$ für alle $i \in I$ und $i' \in I$. Weil $\cap$ distributiv über $\cup$ ist, haben wir

$$U \cap U' = \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \cap \left(\bigcup_{i'\in I'} X_{i'}\right) = \bigcup_{i,i'\in I\times I'} X_i \cap X_{i'}.$$

Den Durchschnitt von X_i und $X_{i'}$ kann man auch als $\bigcap_{j\in J_i} U_j^i \cap \bigcup_{j\in J_{i'}} U_j^{i'}$ schreiben. Da dies ein Schnitt endlich vieler offener Mengen ist, folgt dass $U \cap U'$ in O_S liegt. Wenn U_k für $k \in K$ in $\mathcal{O}_S$ liegen, liegt die Vereinigung $\bigcup_{k\in K} U_k$ auch in $\mathcal{O}_S$ (es ist eine grössere Vereinigung von endlichen Schnitten von Elementen von S). Das zeigt, dass $\mathcal{O}_S$ eine Topologie ist.

Übung 3.

(a) $(\star)$ Entscheiden Sie, welche der folgenden topologischen Räume homöomorph zueinander sind:

$$\mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^2, \quad (0,1), \quad [0,1), \quad [0,1], \quad S^1.$$

(b) $(\star\star\star)$ Sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}^2$ homöomorph?

Lösung für Übung 3:

(a) Zuerst sehen wir, dass $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan(\pi x - \pi/2)$ ein Homöomorphismus zwischen $(0,1)$ und $\mathbb{R}$ ist ($\tan$ ist stetig und $\tan^{-1}$ auch). Jetzt beschreiben wir verschiedene topologische Eigenschaften für die genannten topologische Räume, die zeigen, dass alle anderen topologische Räume nicht homöomorph zueinander sind.

  (i) $\mathbb{R} \cong (0,1)$: Der Raum $\mathbb{R}\backslash\{x\}$ ist für keinen Punkt $x \in \mathbb{R}$ zusammenhängend.
  (ii) $\mathbb{R}^2$: Der Raum $\mathbb{R}^2\backslash\{x_1,\dots,x_n\}$ ist immer zusammenhängend für alle Punkte $x_1,\dots,x_n$ in $\mathbb{R}^2$.
  (iii) $[0,1)$: Der Raum $[0,1)\backslash\{x\}$ ist für keinen Punkt $x \in (0,1)$ zusammenhängend, aber zusammenhängend für $x = 0$.
  (iv) $[0,1]$: Der Raum $[0,1]\backslash\{x\}$ ist für keinen Punkt $x \in (0,1)$ zusammenhängend, aber $[0,1]\backslash\{0,1\}$ ist zusammenhängend.
  (v) S^1: Der Raum $S^1\backslash\{x\}$ ist immer zusammenhängend für alle Punkte $x \in S^1$.

(b) Ja, sie sind homöomorph! Die ist ein Spezialfall des Satzes von Sierpinski.

Übung 4.

Seien X die reellen Zahlen mit der natürlichen Topologie (der von der euklidischen Metrik induzierten), und Y die reellen Zahlen mit der von allen Intervallen der Form $[a,b)$ für $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ erzeugten Topologie.

(a) Zeigen Sie, dass die Topologie von Y feiner als die Topologie von X ist.

(b) Man beschreibe die stetigen Funktionen $f\colon Y \to X$.

Lösung für Übung 4:

(a) Sei (a, b) ein offenes Intervall. Wir haben

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{2^n} b + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) a, b \right).$$

Dies zeigt, dass die Topologie auf Y feiner als die Topologie auf X ist, weil die offenen Intervallen einen Basis für die Topologie auf X sind.

(b) Es genügt, die Stetigkeit auf einer Basis zu prüfen (warum?); d.h. $f\colon Y \to X$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}((x - \varepsilon, x + \varepsilon))$ offen ist für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Diese Menge ist genau dann offen, wenn für jedes $y \in Y$ mit $y \in f^{-1}((x - \varepsilon, x + \varepsilon))$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $[y, y + \delta) \subset f^{-1}((x - \varepsilon, x + \varepsilon))$. Also ist die Stetigkeit von f zu folgendem äquivalent: für alle $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, und y mit $f(y) = x$ existiert ein δ, sodass für alle y' mit $y' \geqslant y$ und $|y - y'| < \delta$ gilt: $|f(y') - f(y)| < \varepsilon$. Das ist genau die Definition von Rechtsstetigkeit.

Übung 5. In dieser Übung vergleichen wir Zusammenhang und Wegzusammenhang.

(a) Zeigen Sie, dass ein wegzusammenhängender Raum X auch zusammenhängend ist.

(b) ($\star$) Zeigen Sie, dass ein zusammenhängender topologischer Raum X, in dem jeder Punkt eine wegzusammenhängende offene Umgebung hat, auch wegzusammenhängend ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ mit der kofiniten Topologie zusammenhängend ist. (Die kofinite Topologie ist in Serie 1 definiert.)

(d) ($\star\star$) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ mit der kofiniten Topologie nicht wegzusammenhängend ist.

Lösung für Übung 5:

(a) Wäre X nicht zusammenhängend, gäbe es U und V, zwei offene nicht-leere Mengen mit $U \sqcup V = X$. Seien $x \in U$ und $y \in V$. Es gibt eine stetige Funktion $\gamma\colon [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1)$, da X wegzusammenhängend ist. Dann haben wir $\gamma^{-1}(U) \sqcup \gamma^{-1}(V) = [0, 1]$ aber $[0, 1]$ ist zusammenhängend. Das ist ein Widerspruch.

(b) Wir betrachten alle $x \in X$ die Menge $S(x)$ aller Punkte, zu denen es einen Weg von x gibt. Wir wollen zeigen, dass die Menge $S(x)$ offen und abgeschlossen ist.

Lemma 1. *Sei X ein topologischer Raum, in dem jeder Punkt eine wegzusammenhängende offene Umgebung hat. Für alle $x \in X$ ist die Menge $S(x)$ offen.*

Beweis. Seien y ein Punkt in $S(x)$ und $\gamma\colon [0, 1] \to X$ ein Weg von x zu y. Mit unserer Hypothese gibt es eine offene Umgebung U für y, die wegzusammenhängend ist. Also gibt es für alle $z \in U$ einen Weg γ' von y zu z. Man kann γ und γ' zu einem Weg von x nach z zusammensetzen. Somit $U \subset S(x)$, und es folgt, dass $S(x)$ offen ist. □

Ähnlich beweist man, dass für $x, y \in X$ entweder $S(x) \cap S(y) = \emptyset$ oder $S(x) = S(y)$ gibt. Wir schreiben

$$X = \bigcup_{x \in X} S(x).$$

All diese Mengen $S(x)$ sind nicht-leer (da $x \in S(x)$) und offen. Da X zusammenhängend ist, haben wir auch, dass $S(x) = S(y)$ für alle $x, y \in S(x)$. In anderen Wörter: X ist wegzusammenhängend.

(c) Wäre $\mathbb{Z}$ nicht zusammenhängend, gäbe es U und V zwei offene nicht-leere Mengen mit $U \sqcup V = \mathbb{Z}$, dann haben wir auch $(\mathbb{Z} \backslash U) \cup (\mathbb{Z} \backslash V) = \mathbb{Z}$. Die Mengen $\mathbb{Z} \backslash U$ und $\mathbb{Z} \backslash V$ sind abgeschlossen, also sind sie endlich. Da $\mathbb{Z}$ unendlich ist, haben wir einen Widerspruch.

(d) Wir beweisen zuerst ein Lemma.

Lemma 2. *Es gibt keine Familie abgeschlossener Mengen* $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$*, von denen mindestens zwei nicht leer sind, mit* $F_i \cap F_j = \emptyset$ *für all* $i, j \in \mathbb{N}$ *und*

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i = [0,1].$$

Beweis. Wir bauen eine Intervallschachtelung

$$[0,1] = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$$

nicht-leerer abgeschlossener Intervalle, welche die zwei folgenden Aussagen erfüllt:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$, $F_n \cap I_n = \emptyset$.
- Für alle $i, n \in \mathbb{N}$ enthält F_i nicht I_n.

Dann gibt es $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$ mit $x \notin F_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Das ist ein Widerspruch.

Wir bauen $(I_n)_n$ mit einer vollständigen Induktion.

Induktionsanfang: Wir definieren $I_0 = [0,1]$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass $I_0, \ldots I_{n-1}$ bereits konstruiert wurden. Wir können I_n wie folgt bauen. Wenn $I_{n-1} \cap F_n = \emptyset$ gilt, dann tun wir nichts: $I_n \coloneqq I_{n-1}$. Betrachten wir jetzt den Fall $I_{n-1} \cap F_n \neq \emptyset$. Nach Annahme gilt $I_{n-1} \not\subset F_n$. Also gibt es eine weiteres $m \neq n$ sodass $I_{n-1} \cap F_m \neq \emptyset$. Man kann offene disjunkte Mengen $U, V \in I_{n-1}$ wählen sodass $F_n \cap I_{n-1} \subset U$ und $F_m \cap I_{n-1} \subset V$ (warum?). Wir definieren I_n als Abschluss einer Zusammenhangskomponente von V. Da Zusammenhangskomponenten offener Mengen in I_{n-1} wieder offen sind (warum?), folgt, dass I_n ein abgeschlossenes Intervall ist. Nach Konstruktion ist es enthalten in I_{n-1} und disjunkt von F_n. Ausserdem enthält I_n sowohl Punkte in F_m, als auch Punkte ausserhalb von F_m. Also gibt es kein F_i, welches I_n enthält. Dies beendet den Induktionsschritt. □

Wäre die Menge $\mathbb{Z}$ wegzusammenhängend, könnten wir einen Pfad $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{Z}$ mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = 1$ finden. Wir haben

$$\mathbb{Z} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} \{n\}$$

eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen, also

$$[0,1] = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} \gamma^{-1}(\{n\}).$$

Das ist ein Widerspruch zu Lemma 2.

Bemerkung 1. *Andererseits, wenn* X *eine topologische Menge mit der kofiniten Topologie und der Kardinalität von* $\mathbb{R}$ *(oder grösser) ist, kann man beweisen, dass* X *wegzusammenhängend ist. Seien* x *und* y *zwei Punkte in* X *und* γ *eine injektive Funktion von* $[0,1]$ *nach* X *mit* $\gamma(0) = x$ *und* $\gamma(1) = y$*. Dann ist* γ *stetig, da für alle abgeschlossen Menge* $F \subset X$, $\gamma^{-1}(F) \subset [0,1]$ *abgeschlossen ist (die Teilmenge ist endlich).*

Als nächstes kann man fragen: „Was passiert wenn die Kardinalität der Menge X *zwischen* $\aleph_0$ *und* $2^{\aleph_0}$ *ist?“. Ein solches* X *existiert, wenn unsere Modell nicht die Kontinuumshypothese (Kontinuumshypothese:* $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$*) erfüllt. Ich kenne die Antwort nicht.*

Übung 6. Die Mengen $\Pi_{i\in I} U_i$ mit $U_i \subset X_i$ offen für alle $i \in I$ bilden eine Basis für eine Topologie auf $\Pi_{i\in I} X_i$, die sogenannte *Box-Topologie*. Betrachten wir $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit dieser Topologie. Zeigen Sie, dass die Menge aller Folgen, die gegen 0 konvergieren, eine offene und abgeschlossene Menge ist. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie und $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit der Boxtopologie nicht homöomorph sind.

Lösung für Übung 6: Sei M die Menge aller Folgen, die gegen 0 konvergieren. Zuerst zeigen wir, dass M offen ist. Sei $(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine gegebene konvergente Folge. Definiere die offene Menge

$$U \coloneqq \prod_{n\in\mathbb{N}} B\left(x_n, \frac{1}{n}\right).$$

Sei $(y_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge in U, dann $|y_n| \leqslant |x_n| + 1/n \to 0$. Das heisst, dass $(y_n)_n$ auch in M liegt. Die Menge M ist also offen. Als nächstes zeigen wir, dass M abgeschlossen ist. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die nicht in M liegt. Das heisst, dass es $\varepsilon > 0$ und eine unendliche Teilmenge $I \subset \mathbb{N}$ mit $|x_n| > \varepsilon$ für alle $n \in I$ gibt. Dann liegen alle Folge $(y_n)_n$ in $\prod_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, \varepsilon/2)$ auch nicht in M. Die Menge M ist dann auch abgeschlossen.

Die Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie ist zusammenhängend (Serie 3, Übung 6). Es folgt, dass die beiden topologischen Räume nicht homöomorph sind.

* * *