



Serie 3: Lösung

Übung 1. Zeigen Sie, dass eine konvergente Folge in einem Hausdorffraum nur einen Häufungspunkt hat. Ein Punkt ist ein *Häufungspunkt* einer Folge, falls jede Umgebung des Punktes unendlich viele Folgenglieder enthält. Folgern Sie, dass in einem Hausdorffraum der Grenzwert einer Folge, sofern er existiert, eindeutig ist.

Lösung für Übung 1: Sei $(X, \mathcal{O})$ ein Hausdorffraum und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit Grenzwert x . Desweiteren sei $y \in X$ ein beliebiger, von x verschiedener Punkt in X . Da X ein Hausdorffraum ist, existieren zwei disjunkte offene Mengen U und V in X so, dass $x \in U$ und $y \in V$. Da U eine offene Umgebung von x ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$ gilt. Da U und V disjunkt sind, können wir jedoch nicht unendlich viele Folgenglieder in V finden, womit y kein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sein kann.

Übung 2. Wie in Serie 2, Übung 4, seien X die reellen Zahlen mit der natürlichen Topologie, und Y die reellen Zahlen mit der von Intervallen der Form $[a, b)$ mit $a < b$ erzeugten Topologie.

- (a) Man zeige, dass Y *total unzusammenhängend* ist (d.h. dass Einpunktmengen die einzigen zusammenhängenden Teilmengen von Y sind).
- (b) Man beschreibe die stetigen Abbildung $X \rightarrow Y$.

Lösung für Übung 2:

- (a) Sei $C \in Y$ eine zusammenhängende Teilmenge mit zwei verschiedenen Punkten $x < y$. Dann

$$C = \left(C \cap \left(-\infty, \frac{x+y}{2} \right) \right) \cup \left(C \cap \left[\frac{x+y}{2}, +\infty \right) \right).$$

Das ist ein Widerspruch, also sind nur die Einpunktmengen zusammenhängend.

- (b) Sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Funktion. Da X zusammenhängend ist, ist auch $f(X) \subset Y$ zusammenhängend. Aus (a) folgt, dass $f(X)$ eine Einpunktmenge ist. Das heisst, dass f eine konstante Funktion ist.

Übung 3. Wie in Serie 1, Übung 2, sei $(X, \mathcal{O}_{\text{cof}})$ ein topologischer Raum mit der kofiniten Topologie.

- (a) Zeigen Sie, dass X das Axiom T_1 erfüllt, d.h. für zwei verschiedene Punkte $a \neq b$ in X existieren offene Umgebungen von a und b , welche den jeweils anderen Punkt nicht enthalten.
- (b) Wann ist X ein Hausdorffraum?
- (c) Zeigen Sie, dass ein beliebiger topologischer Raum X genau dann das Axiom T_1 erfüllt, wenn alle einelementigen Teilmengen von X abgeschlossen sind.

Lösung für Übung 3:

- (a) Seien $a \neq b \in X$. Dann erfüllen die offenen Mengen $X \setminus \{b\}$ (offene Umgebung von a , die b nicht enthält) und $X \setminus \{a\}$ (offene Umgebung von b , die a nicht enthält) die gewünschte Eigenschaft.
- (b) Dies kann nur der Fall sein, wenn X endlich ist, denn für unendliche Mengen X mit der kofiniten Topologie ist der Durchschnitt zweier nichtleerer, offener Mengen nie leer. In der Tat sind für endliche Mengen X aber $\{a\}$ und $X \setminus \{a\}$ immer disjunkte Umgebungen von a und $b \neq a$.
- (c) Sei X ein topologischer Raum, der T_1 erfüllt, und $x \in X$. Für alle $y \neq x$ gibt es also eine offene Umgebung U_y von y , sodass $x \notin U_y$ gilt. Dann ist $\{x\} = X \setminus \bigcup \{U_y \mid y \in X \setminus \{x\}\}$ abgeschlossen. Umgekehrt, seien $a, b \in X$ mit $a \neq b$. Dann sind $\{a\}$ und $\{b\}$ abgeschlossen, also $X \setminus \{b\}$ und $X \setminus \{a\}$ offene Umgebungen mit der gewünschten Eigenschaft.



Übung 4. Sei X eine Menge.

- Was sind die kompakten Mengen in X mit der diskreten Topologie?
- Was sind die kompakten Mengen in X mit der kofiniten Topologie?

Lösung für Übung 4:

- Wir wollen beweisen, dass ein Unterraum $A \subseteq X$ kompakt ist, genau dann wenn er endlich ist. Offensichtlich ist jede endliche Teilmenge von X kompakt, so dass wir die andere Implikation beweisen wollen. Betrachten wir einen unendlichen Unterraum $A \subseteq X$. Dann ist $\{x\}$ offen in A für jedes $x \in A$, da A die diskrete Topologie von X erbt. Daher ist $\mathcal{O} := \{\{x\}, x \in A\}$ eine unendliche offene Überdeckung von A . Offensichtlich lässt $\mathcal{O}$ aber keine endliche Teilüberdeckung zu, also ist A nicht kompakt.
- Alle Teilmengen von X mit der kofiniten Topologie sind kompakt. Für endliche Teilmengen (und insbesondere für endliche Mengen X) folgt dies aus der Definition. Sei also X unendlich, $A \subseteq X$ eine unendliche Teilmenge und $\mathcal{U} = \{A \setminus F_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A für endliche Mengen $F_i \subseteq X, i \in I$. Dann gilt

$$A = \bigcup_{i \in I} A \setminus F_i = A \setminus \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right),$$

also $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Sei nun $F_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$. Für alle $k = 1, \dots, n$, gibt es dann ein $i_k \in I$ sodass $x_k \notin F_{i_k}$ gilt, da der Durchschnitt aller F_i s leer ist. Es gilt also $\bigcap_{k=1}^n F_{i_k} \cap F_1 = \emptyset$, womit

$$\mathcal{U}' := \{A \setminus F_1\} \cup \{A \setminus F_{i_k}\}_{k=1}^n$$

eine endliche Teilüberdeckung von A ist.

Übung 5. (Wegzusammenhangskomponenten) Sei X ein topologischer Raum und sei $x_0 \in X$.

- Die Menge

$$\{x \in X \mid \text{es gibt einen Weg von } x \text{ nach } x_0\}$$

heisst *Wegzusammenhangskomponente* von x_0 (in der Vorlesung haben Sie die Zusammenhangskomponenten gesehen). Zeigen Sie, dass dies die grösste wegzusammenhängende Teilmenge von X ist, welche x_0 enthält.

- Was sind die Zusammenhangskomponenten und Wegzusammenhangskomponenten in $\mathbb{Q}$?
- Finden Sie ein Beispiel eines topologischen Raums mit einer Wegzusammenhangskomponente, die nicht abgeschlossen ist.

Lösung für Übung 5:

- Ist C eine wegzusammenhängende Teilmenge, die x enthält, so können wir einen Weg von x nach y für alle $y \in C$ finden. Daraus folgt, dass C eine Teilmenge der Wegzusammenhangskomponente ist. Andererseits ist die Wegzusammenhangskomponente von x_0 wegzusammenhängend, da es für alle y, x in der Wegzusammenhangskomponente einen Weg von y nach x und einen Weg von x nach z gibt. Man kann diese beiden Wege zu einem Weg von y nach z zusammensetzen.
- Die Zusammenhangskomponenten bzw. Wegzusammenhangskomponenten in $\mathbb{Q}$ sind genau die einelementigen Teilmengen von $\mathbb{Q}$.
- Sei Z die „topologist’s sine curve“ aus der Vorlesung. $Z_0 = \{(0, 0)\}$ und $Z_1 = Z \setminus Z_0$ bilden gerade die Wegzusammenhangskomponenten von Z . Aber $\overline{Z_1} = Z$ und Z_1 ist somit nicht abgeschlossen in Z .



Übung 6.

- Zeigen Sie, dass das Produkt zweier nicht-leerer topologischer Räume X, Y genau dann kompakt ist, wenn X und Y kompakt sind.
- Zeigen Sie, dass das Produkt zweier topologischer Räume X, Y genau dann zusammenhängend ist, wenn X und Y zusammenhängend sind.

Seien $(X_i)_{i \in I}$ topologische Räume.

- Zeigen Sie, dass $\prod_{i \in I} X_i$ genau dann wegzusammenhängend ist, wenn X_i wegzusammenhängend für alle $i \in I$ ist.
- (**) Zeigen Sie, dass $\prod_{i \in I} X_i$ genau dann zusammenhängend ist, wenn X_i zusammenhängend für alle $i \in I$ ist.

Lösung für Übung 6:

- Wenn $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X ist, so ist $(\mathcal{U}_i \times Y)_{i \in I}$ eine Überdeckung von $X \times Y$. Wenn $X \times Y$ kompakt ist, können wir eine endliche Teilüberdeckung finden. Die entsprechenden Mengen sind eine endliche Teilüberdeckung von X (hier verwenden wir, dass Y nicht leer ist).

Für die Umkehrung, sei $(\mathcal{W}_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von $X \times Y$. Wir können annehmen, dass alle $\mathcal{W}_i$ die Form $\mathcal{U}_i \times \mathcal{V}_i$ mit offenen Teilmengen $\mathcal{U}_i \subset X$ und $\mathcal{V}_i \subset Y$ haben, da die offene Teilmengen in dieser Form eine Basis für die Produkttopologie sind (warum genau?). Für alle $x \in X$ gibt es eine endliche Teilmenge $J_x \subset I$ mit

$$\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in J_x} \mathcal{U}_i \times \mathcal{V}_i,$$

da Y kompakt ist. Sei $\mathcal{U}_x = \bigcap_{i \in J_x} \mathcal{U}_i$. Die Menge $\mathcal{U}_x$ ist offen, als ein endlicher Durchschnitt offener Mengen. Dann ist $(\mathcal{U}_x \times \mathcal{V}_i)_{i \in J_x}$ eine offene Überdeckung von $\{x\} \times Y$ und $(\mathcal{U}_x)_{x \in X}$ ist eine offene Überdeckung von X . Da X kompakt ist, gibt es eine Teilüberdeckung $(\mathcal{U}_x)_{x \in K}$ von X für eine endliche Teilmenge $K \subset X$. Es ergibt sich die endliche Teilüberdeckung $(\mathcal{U}_i \times \mathcal{V}_i)_{i \in J_x, x \in K}$ von $X \times Y$. Das heisst, dass $X \times Y$ kompakt ist.

- Wenn $X \times Y$ zusammenhängend ist, dann sind X und Y zusammenhängend als stetige Bilder unter den Projektionsabbildungen $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ bzw. $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$. Für die Umkehrung benutzen wir die folgende Aussage.

Lemma 1. Sei X ein topologischer Raum. Dann ist X nicht zusammenhängend genau dann, wenn es eine stetige, surjektive Abbildung von X nach $\{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie gibt.

Beweis. Angenommen, X ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es zwei nichtleere, offene, disjunkte Teilmengen $U, V \subseteq X$, sodass $X = U \cup V$, und

$$f: X \rightarrow \{0, 1\},$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & x \in U \\ 1 & x \in V \end{cases}$$

ist eine wohldefinierte, surjektive und stetige Abbildung.

Umgekehrt sind wir für eine solche surjektive, stetige Abbildung $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ die Mengen $U := f^{-1}(0)$ und $V := f^{-1}(1)$ nichtleere, offene Teilmengen von X und es gilt $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = X$, sodass X per Definition nicht zusammenhängend ist. $\square$

Sei $(a, b) \in X \times Y$ und $f: X \times Y \rightarrow \{0, 1\}$ eine beliebige stetige Abbildung. Wir müssen zeigen, dass f konstant (also nicht surjektiv) ist. Betrachte die stetige surjektive Abbildung

$$\iota: X \rightarrow X \times \{b\}$$



gegeben durch $\iota(x) = (x, b)$. Dann ist die Abbildung $f|_{X \times \{b\}} \circ \iota$ stetig und konstant (da X zusammenhängend ist). Somit ist jedoch auch $f|_{X \times \{b\}}$ konstant.

Analog sei für jedes $x \in X$ eine stetige surjektive Abbildung

$$\iota_x: Y \longrightarrow \{x\} \times Y$$

durch $\iota_x(y) = (x, y)$ gegeben. Dann ist $f|_{\{x\} \times Y} \circ \iota_x$ stetig und konstant. Folglich ist auch $f|_{\{x\} \times Y}$ konstant. Wegen $(x, b) \in X \times \{b\} \cap \{x\} \times Y$ ist f eingeschränkt auf

$$T_x := X \times \{b\} \cup \{x\} \times Y$$

ebenfalls konstant.

Für alle $x \in X$ gilt $(a, b) \in T_x$ und

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} T_x,$$

also folgt, dass f auf ganz $X \times Y$ konstant ist. Damit ist gezeigt, dass $X \times Y$ zusammenhängend ist.

- (c) Wir nehmen an, dass $\prod_{i \in I} X_i$ wegzusammenhängend ist. Seien x und y zwei Punkte in X_j für ein beliebiges Element $j \in I$. Nach Definition von Wegzusammenhang ist $\prod_{i \in I} X_i$ nicht leer. Wählen wir ein beliebiges $z \in \prod_{i \in I} X_i$, und definieren $x', y' \in \prod_{i \in I} X_i$ sodass $x'_i = x, y'_i = y$ und $x'_j = y'_j = z_j$ für alle $j \neq i$. Dann gibt es einen Weg

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$$

von x' nach y' . Die Verknüpfung $p_i \circ \gamma$ mit der i -ten Projektionsabbildung p_i ist ein Weg von x nach y .

Für die Umkehrung, seien $\{(x_i)\}_{i \in I}$ und $\{(y_i)\}_{i \in I}$ zwei Punkte in $\prod_{i \in I} X_i$. Da alle Menge X_i wegzusammenhängend sind, gibt es Wege $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow X_i$ von x_i zu y_i . Die Funktion

$$\gamma = \prod_{i \in I} \gamma_i$$

ist stetig, weil ihre Verknüpfung mit jeder Projektion stetig ist. Dies ist ein Weg von $\{(x_i)\}_{i \in I}$ nach $\{(y_i)\}_{i \in I}$.

- (d) Die eine Implikation folgt ähnlich wie in (b). Zeigen wir jetzt die andere Richtung, d.h. dass das Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ zusammenhängender Räume X_i zusammenhängend ist. Wir verfahren ähnlich wie in (b): sei eine stetige Funktion $f: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \{0, 1\}$ gegeben. Es genügt zu zeigen, dass f konstant ist. Seien beliebige $x, y \in \prod_{i \in I} X_i$ gegeben. Es genügt zu zeigen, dass $f(x) = f(y)$. Falls sich x und y nur in endlich vielen Koordinaten unterscheiden, verfahren wir genau wie in (b)! Ansonsten: $f^{-1}(f(x))$ ist eine offene Teilmenge in der Produkttopologie. Da Kästchen (endliche Schnitte von Zylindern) eine Basis der Produkttopologie bilden, gibt es ein Kästchen U mit $x \in U \subset f^{-1}(f(x))$. Nach Definition eines Kästchens gibt es eine Teilmenge $J \subset I$ mit endlichem Komplement $I \setminus J$, sodass wir für einen Punkt in U alle Koordinaten aus J ändern können, und der so entstehende Punkt immer noch in U liegt. Auf diese Weise konstruieren wir einen Punkt $x' \in U$, der sich von y nur in endlich vielen Koordinaten unterscheidet. Nun gilt $f(x) = f(x')$, da $x, x' \in U$, und $f(x') = f(y)$ nach der Argumentation in (b). Es folgt wie gewünscht $f(x) = f(y)$.

Übung 7. Die Cantor-Menge $C \subseteq \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert. Sei

$$C_1 := [0, 1] \quad \text{und} \quad C_n := \frac{1}{3}C_{n-1} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1}\right).$$

Nachfolgend sind C_1 bis C_7 abgebildet.





Dann ist die Cantor-Menge definiert durch

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge kompakt ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge überabzählbar ist.
- (c) Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponenten von C jeweils nur aus einem Punkt bestehen (d.h. C ist *total unzusammenhängend*), aber C keine isolierten Punkte hat. Hier heisst ein Punkt x eines topologischen Raums *isoliert*, falls $\{x\}$ offen ist.
- (d) (***) Zeigen Sie, dass jeder nicht-leere, total unzusammenhängende, metrisierbare, kompakte topologische Raum X ohne isolierte Punkte homöomorph zu C ist. Zum Aufwärmen kann man z.B. zeigen, dass C zu $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ homöomorph ist, wobei $\{0, 1\}$ die diskrete Topologie trägt.

Lösung für Übung 7:

- (a) Nach Definition ist die Cantor-Menge der Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen und somit abgeschlossen. Da die Cantor-Menge beschränkt ist, ist sie nach dem Satz von Heine-Borel kompakt.
- (b) Für jede Folge $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ definieren wir

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \frac{2}{3^m}.$$

Alle solche x sind verschieden und in allen C_m und somit in C enthalten. Da es überabzählbar viele 0-1-Folgen gibt, ist die Cantor-Menge C überabzählbar.

- (c) Wir nehmen widerspruchswise an, dass es eine Zusammenhangskomponente in C gibt, welche mindestens zwei verschiedene Punkte x und y enthält. Bezeichne den Abstand dieser zwei Punkte (in der Standardmetrik) mit $\delta > 0$. Die Mengen C_n sind eine disjunkte Vereinigung von (abgeschlossenen) Intervallen der Länge $\frac{1}{3^{n-1}}$. Somit liegen die beiden Punkte x und y für n genügend gross (abhängig von δ) in unterschiedlichen Intervallen von C_n . Da $C \subseteq C_n$ gilt, können diese zwei Punkte somit nicht in derselben Zusammenhangskomponente von C liegen, im Widerspruch zur Annahme.
- (d) Dies ist ein Satz von Brouwer. Sie können einen Beweis online finden. Für die Aufwärmübung zeigen Sie, dass die Abbildung in der Lösung von (b) ein Homöomorphismus ist.

* * *