



Serie 4

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Seien X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi: X \rightarrow X/\sim, x \mapsto [x]$. Zeigen Sie:

- (a) Die Quotiententopologie

$$\mathcal{O}_{X/\sim} := \{U \subseteq X/\sim \mid \pi^{-1}(U) \text{ ist offen in } X\}$$

ist eine Topologie auf $X/\sim$.

- (b) Die Abbildung π ist stetig.

- (c) $\mathcal{O}_{X/\sim}$ ist die grösste (auch *feinste* genannt) Topologie auf $X/\sim$, sodass π stetig ist, d.h. falls $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $X/\sim$ ist, sodass π stetig ist, dann gilt $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{X/\sim}$.

- (d) Für einen topologischen Raum Y ist eine Funktion $f: X/\sim \rightarrow Y$ genau dann stetig, falls die Verknüpfung $f \circ \pi: X \rightarrow Y$ stetig ist.

Lösung für Übung 1:

- (a) Es gilt $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $\pi^{-1}(X/\sim) = X$, also $\emptyset, X/\sim \in \mathcal{O}_{X/\sim}$. Seien $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{O}_{X/\sim}$. Dann sind $\pi^{-1}(U_i) \subseteq X$ offen für alle $i \in I$ und

$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i)$$

ist offen als Vereinigung in X offener Mengen, also $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}_{X/\sim}$. Für $U, V \in \mathcal{O}_{X/\sim}$ ist

$$\pi^{-1}(U \cap V) = \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) \subseteq X$$

offen als Durchschnitt in X offener Mengen, also $U \cap V \in \mathcal{O}_{X/\sim}$.

- (b) Für alle $U \in \mathcal{O}_{X/\sim}$ ist per Definition der Quotiententopologie $\pi^{-1}(U)$ offen in X , also π stetig.
- (c) Sei $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $X/\sim$, sodass π stetig ist, und sei $U \in \mathcal{O}$. Dann ist $\pi^{-1}(U) \subseteq X$ offen wegen der Stetigkeit, also $U \in \mathcal{O}_{X/\sim}$.
- (d) Wir zeigen, dass eine Abbildung $f: X/\sim \rightarrow Y$ genau dann stetig ist, wenn die Abbildung $f \circ \pi: X \rightarrow Y$ stetig ist.

Als erstes ist es klar, dass die Abbildung $f \circ \pi: X \rightarrow Y$ stetig ist, wenn $f: X/\sim \rightarrow Y$ stetig ist, da $\pi: X \rightarrow X/\sim$ stetig ist. Sei jetzt $f: X/\sim \rightarrow Y$ eine Abbildung, die $f \circ \pi$ stetig erfüllt. Für alle offene Menge $\mathcal{V} \subset Y$ haben wir, dass $(f \circ \pi)^{-1}(\mathcal{V})$ offen ist. Das heisst, dass $\pi^{-1}(f^{-1}(\mathcal{V}))$ offen ist. Aber folgt aus der Definition der Topologie auf $X/\sim$, dass $f^{-1}(\mathcal{V})$ offen ist.

Übung 2. Für $n \in \mathbb{N}$, sei $\mathbb{D}^n = \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| \leq 1\}$ mit der Euklidischen Topologie ausgestattet. Wir betrachten die Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben durch

$$v \sim w \Leftrightarrow v = w \text{ oder } |v| = |w| = 1.$$

Finden Sie einen zu $\mathbb{D}^n/\sim$ homöomorphen Teilraum eines $\mathbb{R}^m$.

Lösung für Übung 2: Wir betrachten die folgende stetige Abbildung zwischen $\mathbb{D}^n$ und $\mathbb{S}^n := \{w = \{w_1, \dots, w_{n+1}\} \in \mathbb{R}^n \mid |w|^2 = |w_1|^2 + \dots + |w_{n+1}|^2 = 1\}$:

$$f: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^n, (v_1, \dots, v_n) \mapsto (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n, 1 - 2|v|),$$



mit $\lambda = \sqrt{(4 - 4|v|)/|v|}$ wenn $|v| \neq 0$ und $\lambda = 0$ wenn $|v| = 0$. Man zeigt, dass für alle $v \in \mathbb{D}^n$,

$$|f(v)| = \sum_{i=1}^n \lambda^2 v_i^2 + (1 - 2|v|)^2 = \lambda^2 |v|^2 + (1 - 2|v|)^2 = 1.$$

Ausserdem haben wir, dass für alle v mit $|v| = 1$ $f(v) = (0, \dots, 0, -1)$. Also induziert f eine stetige Abbildung

$$g: \mathbb{D}^n / \sim \rightarrow \mathbb{S}^n.$$

Es ist klar, dass g bijektiv ist. Wir sollen auch zeigen, dass g ein Homöomorphismus ist. Das folgt aus dem Homöomorphismuskriterium (Satz 6.5 aus der Vorlesung in Woche 4). Der Topologische Raum $\mathbb{D} / \sim$ ist kompakt als Quotient eines kompakten Raums und $\mathbb{S}^n$ ist Hausdorff als Unterraum von $\mathbb{R}^{n+1}$.

Übung 3. (Der Torus) Zeigen Sie, dass der topologische Produktraum $X_1 = S^1 \times S^1$ homöomorph zum Quotientenraum $X_2 = Q / \sim$ ist, den man erhält, wenn man auf $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ die Äquivalenzrelation $(s, 0) \sim (s, 1)$ für alle $s \in [0, 1]$ und $(0, t) \sim (1, t)$ für alle $t \in [0, 1]$ betrachtet. Dies sind zwei mögliche (äquivalente) Definitionen des Torus T^2 .

Lösung für Übung 3: Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f: [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^4, \\ (s, t) &\mapsto (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)). \end{aligned}$$

Es ist leicht zu sehen, dass f eine stetige Abbildung ist. Ausserdem gilt

$$f(s, 0) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), 1, 0) = f(s, 1)$$

für alle $s \in [0, 1]$ und analog $f(0, t) = f(1, t)$ für alle $t \in [0, 1]$. Die Abbildung f induziert also eine stetige Abbildung $\tilde{f}: X_2 \rightarrow S^1 \times S^1$ auf dem Quotientenraum $X_2 = Q / \sim$ (hier haben wir die universelle Eigenschaft der Quotiententopologie verwendet). Wir wollen zeigen, dass $\tilde{f}$ ein Homöomorphismus ist. Es ist einfach zu überprüfen, dass $\tilde{f}$ bijektiv ist, daher folgt die Aussage aus dem Homöomorphismuskriterium (Satz 6.5 aus der Vorlesung in Woche 4), da X_2 kompakt ist (als Quotient eines kompakten Raums, also als Bild eines kompakten Raums unter der Quotientenabbildung) und $S^1 \times S^1$ ein Hausdorffraum ist (als Unterraum von $\mathbb{R}^4$, was ein Hausdorffraum ist).

Übung 4. (Der reelle projektive Raum) Zeigen Sie, dass die unten definierten topologischen Räume X_1 , X_2 und X_3 homöomorph sind. Dies sind drei mögliche (äquivalente) Definitionen des projektiven Raums $\mathbb{RP}^2$.

- Sei $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ die zweidimensionale Einheitssphäre. Wir betrachten auf S^2 die Äquivalenzrelation $\sim$, welche die Antipoden auf S^2 identifiziert, d.h. $u \sim v$ wenn $u = v$ oder $u = -v$. Dann ist der topologische Raum X_1 definiert als der Quotientenraum $X_1 := S^2 / \sim$.
- Wir betrachten die zweidimensionale Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ und die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{D}^2$, welche die Antipoden auf ihrem Rand identifiziert, d.h. $u \sim v$ wenn $u = v$ oder $u = -v$ für $u, v \in \partial \mathbb{D}^2$. Der topologische Raum X_2 ist dann der Quotientenraum $X_2 := \mathbb{D}^2 / \sim$.
- Sei $\mathcal{L}$ die Menge der Geraden in $\mathbb{R}^3$, die durch den Ursprung gehen. Für $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ sei $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ der Winkel zwischen L_1 und L_2 und wir definieren $d(L_1, L_2) := \alpha$. Dann definieren wir den topologischen Raum X_3 als $\mathcal{L}$ mit der durch d induzierten Topologie.

Lösung für Übung 4: Wir zeigen zunächst, dass X_1 homöomorph zu X_2 ist. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{D}^2 \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3, \\ (x, y) &\mapsto \left(x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}\right). \end{aligned}$$

Die Abbildung f bildet $\mathbb{D}^2$ homöomorph auf die nördliche Halbkugel $\{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$ von S^2 ab. Wir bezeichnen mit $p: S^2 \rightarrow S^2 / \sim = X_1$ und $q: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2 / \sim = X_2$ die entsprechenden Quotientenabbildungen. Beachten



Sie, dass $p \circ f(u) = p \circ f(v)$ für alle $u \sim v$ in $\mathbb{D}^2$ gilt. Die Abbildung $p \circ f$ induziert daher eine stetige Abbildung $g: X_2 \rightarrow X_1$ auf dem Quotientenraum X_2 , d.h. das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^2 & \xrightarrow{f} & S^2 \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ X_2 & \xrightarrow{g} & X_1. \end{array}$$

Es ist einfach zu überprüfen, dass die Abbildung g bijektiv ist, also impliziert wie in Übung 3 das Homöomorphismuskriterium (Satz 6.5 aus der Vorlesung in Woche 4), dass g ein Homöomorphismus ist, wie wir es wollten. In der Tat ist X_2 kompakt (als Quotient des kompakten Raums $\mathbb{D}^2$) und X_1 ist ein Hausdorffraum. Um zu sehen, dass X_1 ein Hausdorffraum ist, können wir für beliebige $u, v \in S^2$ mit $p(u) \neq p(v)$ offene Umgebungen $U, V \subseteq S^2$ von u, v finden, die symmetrisch bezüglich des Ursprungs sind (d.h. $U = -U$ und $V = -V$) und so, dass $U \cap V = \emptyset$. Dann sind $p(U), p(V)$ disjunkte offene Umgebungen von $p(u)$ und $p(v)$.

Wir zeigen nun, dass X_1 homöomorph zu X_3 ist. Wir betrachten dazu die Abbildung $h: S^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow X_3$, wobei $h(u)$ für alle $u \in S^2$ definiert ist als die Gerade, die durch u und den Ursprung in $\mathbb{R}^3$ verläuft. Dann ist h stetig und surjektiv. Ausserdem gilt $h(u) = h(v)$ genau dann, wenn $u = v$ oder $u = -v$ ist. Daher induziert h eine bijektive, stetige Abbildung $\tilde{h}: X_1 \rightarrow X_3$ auf dem Quotientenraum $X_1 = S^2 / \sim$. Daraus folgt wiederum durch das Homöomorphismuskriterium (X_1 ist kompakt, da Quotient von S^2 , und X_3 ist Hausdorff, da metrischer Raum), dass $\tilde{h}$ ein Homöomorphismus ist, womit der Beweis abgeschlossen ist.

Übung 5. Sei X ein topologischer Raum und sei $\Delta := \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$ die Diagonale von $X \times X$.

- Zeigen Sie, dass X genau dann ein Hausdorffraum ist, wenn Δ in $X \times X$ abgeschlossen ist.
- Sei $\sim$ eine beliebige Äquivalenzrelation auf X und definiere $R := \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$. Angenommen, $\pi: X \rightarrow X/\sim$ ist *offen*, d.h. das Bild $\pi(U)$ einer jeden offenen Menge $U \subseteq X$ ist offen in $X/\sim$. Zeigen Sie, dass $X/\sim$ genau dann ein Hausdorffraum ist, wenn R in $X \times X$ abgeschlossen ist.

Lösung für Übung 5:

- Angenommen X ist Hausdorff. Wir zeigen, dass $Y := (X \times X) \setminus \Delta$ offen ist. Sei $(x, y) \in Y$, dann sind $x, y \in X$ verschiedene Elemente. Weil X Hausdorff ist, gibt es offene Mengen U_x, U_y sodass $x \in U_x, y \in U_y$ und $U_x \cap U_y = \emptyset$. Dann $(x, y) \in U_x \times U_y \subseteq Y$. Also ist Y offen.

Angenommen Y ist offen. Dann ist für jede $x \neq y \in X$ das Paar $(x, y) \in Y$. Da Y offen ist, gibt es offene Mengen $U_x, U_y \subseteq X$ sodass $(x, y) \in U_x \times U_y \subset Y$. Es folgt: $x \in U_x, y \in U_y$ und $U_x \cap U_y = \emptyset$. Also ist X Hausdorff.

- Wir müssen zeigen, dass R abgeschlossen ist gdw. $(\pi \times \pi)(R) = \Delta \subset (X/\sim \times X/\sim)$ abgeschlossen ist. Dann können wir Teil (a) benutzen.

Angenommen R ist abgeschlossen. Weil π offen ist, ist auch $\pi \times \pi$ offen: wenn $O \subset X \times X$ offen ist, schreiben wir $O = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$ und

$$(\pi \times \pi)(O) = (\pi \times \pi) \left(\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i \right) = \bigcup_{i \in I} \pi(U_i) \times \pi(V_i)$$

ist auch offen. Insbesondere ist

$$(\pi \times \pi)((X \times X) \setminus R) = (X/\sim \times X/\sim) \setminus (\pi \times \pi)(R)$$

offen, und so ist $(\pi \times \pi)(R)$ abgeschlossen.

Angenommen $(\pi \times \pi)(R)$ ist abgeschlossen, so ist $(X/\sim \times X/\sim) \setminus (\pi \times \pi)(R)$ offen. Weil π stetig ist, ist auch $\pi \times \pi$ stetig. Insbesondere ist

$$(\pi \times \pi)^{-1}((X/\sim \times X/\sim) \setminus (\pi \times \pi)(R)) = (X \times X) \setminus R$$

offen, und so ist R abgeschlossen.



Übung 6. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und sei ∞ ein abstraktes Symbol, welches nicht in X enthalten ist. Wir definieren die *Einpunktkompaktifizierung* (auch *Alexandroff-Kompaktifizierung* genannt) $\hat{X}$ von X als die Menge $X \cup \{\infty\}$ mit der Topologie

$$\mathcal{O}_{\hat{X}} := \mathcal{O}_X \cup \{ \{\infty\} \cup (X \setminus K) \mid K \subseteq X \text{ kompakt und abgeschlossen} \}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\hat{X}$ ein kompakter topologischer Raum ist.
- (b) Finden Sie für die Einpunktkompaktifizierung $\hat{X}$ folgender topologischer Räume einen Teilraum eines $\mathbb{R}^n$, zu dem sie homöomorph sind:
 - (i) $X = [0, 1)$
 - (ii) $X = (0, 1)$
 - (iii) $X = [0, 1]$
 - (iv) $X = \mathbb{R}^n$.

Lösung für Übung 6:

- (a) Es ist relativ einfach zu sehen, dass $(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}})$ ein topologischer Raum ist. Für die Kompaktheit sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $\hat{X}$. Dann gibt es ein $k \in I$ mit $\infty \in U_k$ und somit ist $U_k = \{\infty\} \cup (X \setminus K)$ für ein kompaktes und abgeschlossenes $K \subseteq X$. Dann ist

$$\bigcup_{i \in I \setminus \{k\}} U_i = \hat{X} \setminus U_k = K$$

eine offene Überdeckung der kompakten Teilmenge K von X . Es gibt also eine endliche Teilüberdeckung dieser Menge und somit auch von $\hat{X}$.

- (b) Für (iii), es ist einfach zu sehen, dass $\hat{X} \cong X \cup \{\infty\}$ für kompakte topologische Räume. Für die andere Punkte, wir werden das folgendes benutzen:

Lemma 1. Sei Y ein topologischer Raum, der Hausdorff und kompakt ist. Sei $y \in Y$ und $X := Y \setminus \{y\}$. Dann $\hat{X} \cong Y$.

Wir leiten daraus ab:

- (i) $\hat{X} = \widehat{[0, 1)} \cong [0, 1]$
- (ii) $\hat{X} = \widehat{(0, 1)} \cong S^1$
- (iii) $\hat{X} = \widehat{[0, 1]} \cong [0, 1] \cup \{\infty\}$
- (iv) $\hat{X} = \widehat{\mathbb{R}^n} \cong S^n$.

In (iv) benutzen wir auch, dass $S^n \setminus \{e_n\} \cong \mathbb{R}^n$: dies ergibt sich aus der gleichen Konstruktion wie das Homöomorphismus $\mathbb{D}^n / \sim \cong S^n$.

Beweis des Lemmas. Wir betrachten die folgende Abbildung:

$$f : \hat{X} \rightarrow Y : p \mapsto \begin{cases} p & \text{wenn } p \in X; \\ y & \text{wenn } p = \infty. \end{cases}$$

Wir zeigen zuerst, dass f stetig ist. Sei $U \subset Y$ eine offene Menge. Wenn $y \notin U$, ist $U \subset X \subset Y$ eine offene Menge von X , darum ist $f^{-1}(U) = U \subset X \subset \hat{X}$ auch offen. Wenn $y \in U$, ist $Y \setminus U$ eine abgeschlossene Menge von $X \subset Y$, die auch kompakt ist (weil eine abgeschlossene Menge in einem kompakten Raum auch kompakt



ist). Darum ist $f^{-1}(Y \setminus U) = Y \setminus U \subset X \subset \widehat{X}$ kompakt und abgeschlossen. Nach der Definition der Topologie von $\widehat{X}$, ist

$$f^{-1}(U) = \widehat{X} \setminus f^{-1}(Y \setminus U) \subset \widehat{X}$$

offen.

Dann ist f eine stetige bijektive Abbildung vom kompakten Raum $\widehat{X}$ auf den Hausdorffraum Y . Daraus folgt durch das Homöomorphismuskriterium, dass f ein Homöomorphismus ist. $\square$

* * *