



Serie 5

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn eine Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf dem Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Sei X ein topologischer Raum und CX der Kegel über X . Zeigen Sie, dass CX wegzusammenhängend ist.

Lösung für Übung 1: Sei $p = [(x, 1)]$ für beliebiges $x \in X$ die „Spitze“ des Kegels $CX = X \times [0, 1]/X \times \{1\}$. Wir zeigen, dass es von jedem beliebigen Punkt in CX einen Weg nach p gibt. Daraus folgt die Behauptung. Sei also $[(x, t)]$ ein beliebiger Punkt in CX und sei $\alpha: [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1]$ definiert durch $s \mapsto (x, 1 + s(t - 1))$. Dann ist α offenbar stetig und somit ein Weg von $(x, 1)$ nach (x, t) in $X \times [0, 1]$. Verknüpft mit der Projektion $\pi: X \times [0, 1] \rightarrow CX$ erhalten wir einen Weg $\pi \circ \alpha$ in CX von p nach $[(x, t)]$ wie gewünscht.

Übung 2. Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ den Kegel CS^n und die Suspension ΣS^n bis auf Homöomorphie.

Lösung für Übung 2: Es gilt $CS^n \cong \mathbb{D}^{n+1}$ und $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Für CS^n , sehen wir S^n als Untermenge von $\mathbb{D}^{n+1}$, und betrachten wir die Abbildung

$$f: S^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}^{n+1}, (x, t) \mapsto (1 - t)x.$$

Die auf CS^n induzierte Abbildung ist ein Homöomorphismus: f ist stetig, die induzierte Abbildung ist bijektiv, CS^n ist kompakt, und $\mathbb{D}^{n+1}$ ist Hausdorff.

Für ΣS^n , benutzen wir Übung 3 (a) und (b).

Übung 3.

- (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi: S^{n-1} \subseteq \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n, x \mapsto x$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{D}^n \cup_{\varphi} \mathbb{D}^n$ homöomorph zu S^n ist.
- (b) Sei X ein topologischer Raum und CX der Kegel über X . In welchem Sinne kann man CX mit CX verkleben, sodass man ΣX bekommt?

Lösung für Übung 3:

- (a) Wie betrachten die Abbildung

$$g: \mathbb{D}^n + \mathbb{D}^n \rightarrow S^n, \\ g(v) = \begin{cases} (v, \sqrt{1 - |v|^2}) & v \in \mathbb{D}^n + \emptyset \\ (v, -\sqrt{1 - |v|^2}) & v \in \emptyset + \mathbb{D}^n \end{cases}$$

Die auf $\mathbb{D}^n \cup_{\varphi} \mathbb{D}^n$ induzierte Abbildung ist ein Homöomorphismus: g ist stetig, die induzierte Abbildung ist bijektiv, $\mathbb{D}^n \cup_{\varphi} \mathbb{D}^n$ ist kompakt, und S^n ist Hausdorff.

- (b) Sei $\varphi: X \times \{0\} \subseteq CX = X \times [0, 1]/X \times \{1\} \rightarrow CX$ die Abbildung $(x, 0) \mapsto (x, 0)$. Dann ist $CX \cup_{\varphi} CX \cong \Sigma X$.

Übung 4. Eine topologische Gruppe ist eine Gruppe G , versehen mit einer Topologie, bezüglich der die Abbildungen

$$G \times G \rightarrow G, (g, g') \mapsto gg' \text{ und } G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$$

stetig sind. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Für jedes $g_0 \in G$ sind die *Rechtstranslation* $R_{g_0}: G \rightarrow G, g \mapsto gg_0$ und die *Linkstranslation* $L_{g_0}: G \rightarrow G, g \mapsto g_0g$ Homöomorphismen.



- (b) Die Stetigkeit der genannten Abbildungen ist äquivalent zu der Stetigkeit der *einen* Abbildung $G \times G \rightarrow G$, $(g, g') \mapsto g^{-1}g'$.
- (c) Sei $GL_n(\mathbb{R})$ mit der Topologie versehen, die von der Inklusion $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ kommt. Zeigen Sie, dass $GL_n(\mathbb{R})$ eine topologische Gruppe ist.
- (d) Die Topologie auf G ist schon eindeutig bestimmt durch eine Umgebungsbasis des Einselementes e . Hier ist eine *Umgebungsbasis* von e eine Familie offener Mengen, sodass jede offene Umgebung von e eine Menge U aus der Familie mit $e \in U$ enthält.
- (e) Ein Homomorphismus von topologischen Gruppen ist stetig dann und nur dann, wenn er beim Einselement stetig ist. Hier ist eine Funktion *stetig bei e* , wenn das Urbild jeder Umgebung des Bildes von e eine Umgebung von e ist.
- (f) $(\star)$ Jede offene Untergruppe $H \subset G$ ist abgeschlossen.
- (g) Ist $H \subset G$ eine normale Untergruppe, so ist die Quotientengruppe G/H mit der Quotiententopologie wieder eine topologische Gruppe.

Lösung für Übung 4:

- (a) Sei $g_0 \in G$ beliebig. Die Rechtstranslation $G \rightarrow G, g \mapsto gg_0$ ist die Verknüpfung von $G \rightarrow G \times G, g \mapsto (g, g_0)$ mit der gegebenen Abbildung $G \times G \rightarrow G$, also ist sie auch stetig. Die Linkstranslation ist auch stetig aus dem gleichen Gründen. Jetzt sehen wir, dass die Linkstranslation $G \rightarrow G, g \mapsto g_0^{-1}g$ stetig ist und die Inverse von der Rechtstranslation $G \rightarrow G, g \mapsto gg_0$. Es folgt, dass die Rechtstranslation ein Homöomorphismus ist.
- (b) Wenn die Abbildung $m : G \times G \rightarrow G, (g, g') \mapsto g^{-1}g'$ stetig ist, haben wir, dass die Abbildung $G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$ stetig ist, da sie (ähnlich wie in (a)) eine Verknüpfung der Abbildung $(g, g') \mapsto g^{-1}g'$ mit $G \rightarrow G \times G, g \mapsto (g, e)$ ist. Die Komposition der zwei stetigen Abbildungen $G \times G \rightarrow G \times G, (g, g') \mapsto (g^{-1}, g')$ und $G \times G \rightarrow G, (g, g') \mapsto g^{-1}g'$ ist die Abbildung $G \times G, (g, g') \mapsto gg'$. Also ist diese auch stetig.
Wenn die zwei Abbildungen $G \times G \rightarrow G, (g, g') \mapsto gg'$ und $G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$ stetig sind, haben wir aus dem gleichen Gründen wie oben, dass die Abbildung $G \times G \rightarrow G, (g, g') \mapsto g^{-1}g'$ auch stetig ist.
- (c) Da die Formeln für das Inverse einer Matrix und für das Produkt zweier Matrix stetig sind, folgt, dass $GL_n(\mathbb{R})$ eine topologische Gruppe ist.
- (d) Für beliebige $g \in G$ ist die Abbildung R_g ein Homöomorphismus, der e auf g schickt. Also schickt er auch eine Umgebungsbasis von e auf eine Umgebungsbasis von g . Insofern bestimmt eine Umgebungsbasis von e Umgebungsbasen für alle Punkte, und damit die Topologie.
- (e) Dies folgt aus den gleichen Gründen wie (d).
- (f) Sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Da R_g ein Homöomorphismus ist, ist $R_g(H)$ auch offen. Aber die Menge

$$G \setminus H = \bigcup_{g \notin H} R_g(H)$$

ist offen. Das heisst, dass H abgeschlossen ist.

- (g) Wir zeigen das folgende Lemma.

Lemma 1. Die Quotientenabbildung

$$\pi: G \rightarrow G/H$$

ist offen.



Beweis. Sei $U \in \mathcal{G}$ eine offene Menge. Wir wollen zeigen, dass $\pi(U) \subset \mathcal{G}/H$ auch offen ist. Dies ist äquivalent zu $\pi^{-1}(\pi(U)) \subset \mathcal{G}$ offen, da $\mathcal{G}/H$ die Quotiententopologie trägt. Aber

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{h \in H} hU$$

ist die Vereinigung offener Mengen (unter Verwendung von (a)), also ist $\pi^{-1}(\pi(U))$ auch offen. $\square$

Wir wollen zeigen, dass die Abbildung

$$\tilde{m} : (\mathcal{G}/H, \mathcal{G}/H) \rightarrow \mathcal{G}/H, (gH, g'H) \mapsto g^{-1}g'H$$

stetig ist. Sei $U \subset \mathcal{G}/H$ eine offene Menge, dann

$$\begin{aligned} \tilde{m}^{-1}(U) &= \{(gH, g'H) \mid g^{-1}g'H \in U\} \\ &= \{(gH, g'H) \mid g^{-1}g' \in \pi^{-1}(U)\} \\ &= \pi(\{(g, g') \mid g^{-1}g' \in \pi^{-1}(U)\}) \\ &= \pi(m^{-1}(\pi^{-1}(U))). \end{aligned}$$

Nach der Definition der Quotiententopologie ist $\pi^{-1}(U)$ offen. Also ist $m^{-1}(\pi^{-1}(U))$ offen, weil m stetig ist. Und $\pi(m^{-1}(\pi^{-1}(U)))$ ist offen, weil π offen ist. Also ist $\tilde{m}$ stetig.

Übung 5. Sei X ein Hausdorffraum und K eine kompakte Teilmenge von X . Zeigen Sie:

- (a) Der Quotientenraum X/K ist ein Hausdorffraum.
- (b) Sei $A \subsetneq K$ eine offene Teilmenge von X . Dann ist die durch $f([x]_A) = [x]$ definierte Abbildung

$$f : (X \setminus A)/(K \setminus A) \rightarrow X/K$$

wohldefiniert und ein Homöomorphismus. Hierbei bezeichnen $[x]_A$ und $[x]$ die Äquivalenzklassen in $(X \setminus A)/(K \setminus A)$ bzw. X/K .

- (c) Die Aussage aus (b) stimmt nicht, wenn $A = K$ ist.
- (d) Angenommen, X ist kompakt. Dann ist X/K die Einpunktkompaktifizierung von $X \setminus K$. Die Einpunktkompaktifizierung wurde auf Serie 4 definiert.

Lösung für Übung 5:

- (a) Wir zeigen zuerst:

Lemma 2. Sei X ein Hausdorff topologischer Raum, $K \subset X$ eine kompakte Menge, und $x \in X \setminus K$. Dann existieren offene disjunkte Mengen U_K, U_x sodass $K \subset U_K$ und $x \in U_x$.

Beweis des Lemma. Für jedes $k \in K$, existieren offene disjunkte Mengen V_k, W_k sodass $k \in V_k$ und $x \in W_k$. Weil K kompakt ist, gibt es $k_1, \dots, k_n \in K$ sodass $K \subset U_K := \bigcup V_{k_i}$. Dann gilt für U_K und $U_x := \bigcap W_{k_i}$ die Aussage. $\square$

Bemerkung 1. Sie können Ähnliches auch für zwei disjunkte kompakte Mengen zeigen.

Seien $[x] \neq [y] \in X/K$; insbesondere sind x und y nicht beide in K . Wenn $x, y \notin K$, wählen wir offene disjunkte Mengen $U_x, U_y \subset X$ sodass $x \in U_x, y \in U_y$. Dann haben $U_x \setminus K$ und $U_y \setminus K$ die gleichen Eigenschaften. Weil $\pi^{-1}\pi(U_x \setminus K) = U_x \setminus K$, und da gleiches für y gilt, sind $\pi(U_x \setminus K)$ und $\pi(U_y \setminus K)$ offene disjunkte Mengen von $X/\sim$ sodass $[x] \in \pi(U_x \setminus K)$ und $[y] \in \pi(U_y \setminus K)$.

Wenn $x \notin K$ und $y \in K$, wählen wir durch das Lemma offene disjunkte Mengen $U_x, U_K \subset X$ sodass $x \in U_x$ und $K \subset U_K$. Jetzt haben wir sofort $\pi^{-1}\pi(U_x) = U_x$ und $\pi^{-1}\pi(U_K) = U_K$, und das Argument lässt sich wie im ersten Fall abschliessen.



- (b) Sei $i: X \setminus A \rightarrow X$ die Inklusion, und $\pi_A: X \setminus A \rightarrow (X \setminus A)/(K \setminus A)$ und $\pi: X \rightarrow X/K$ die Projektionen. Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X \setminus A & \xrightarrow{i} & X \\ \pi_A \downarrow & & \downarrow \pi \\ (X \setminus A)/(K \setminus A) & \xrightarrow{f} & X/K \end{array}$$

Weil i stetig ist, ist auch $\pi \circ i = \pi_A \circ f$ stetig, darum ist f stetig. Es ist leicht zu sehen, dass f bijektiv ist: hier benutzen wir, dass ein Punkt $x \in K \setminus A$ existiert, sodass $f([x]_A) = [x] = [K]$.

Wir müssen nur zeigen, dass f offen ist (wir können das Homöomorphismuskriterium nicht benutzen, weil es möglich ist, dass X nicht kompakt ist). Sei $U \subset (X \setminus A)/(K \setminus A)$ offen. Wir müssen zeigen dass $\pi^{-1}(f(U))$ offen ist.

Wenn $[x]_A \notin U$ für jede $x \in K \setminus A$, ist $\pi_A^{-1}(U) \subset X \setminus K$ offen. Aber $X \setminus K$ ist offen in X (weil X ist Hausdorff und K ist kompakt), darum ist $i(\pi_A^{-1}(U))$ auch offen, und $\pi^{-1}(f(U)) = i(\pi_A^{-1}(U))$ ist offen.

Angenommen $[K \setminus A]_A \in U$. Dann ist $i(\pi_A^{-1}(U) \cup A)$ in X offen (weil A offen ist) und darum ist $\pi^{-1}(f(U)) = i(\pi_A^{-1}(U) \cup A)$ auch offen.

- (c) Wir betrachten $X = \{x, y\}$ mit einer beliebigen Topologie und $A = K = \{x\}$. Dann hat $(X \setminus A)/(K \setminus A)$ ein Element, und X/K zwei Elemente.
- (d) In Serie 4, Übung 6(b), haben wir gezeigt, dass wenn Z kompakt und Hausdorff ist, und $W := Z \setminus \{z\}$, dann gilt $\bar{W} \cong Z$ (siehe die Lösungen von Serie 4). Hier nehmen wir $Z = X/K$, welches in der Tat kompakt (als Quotientenraum vom kompakten Raum X) und Hausdorff (siehe (a)) ist; und $z = [K]$, sodass $W = Z \setminus \{z\} = X/K \setminus [K] \cong X \setminus K$.

Übung 6. In dieser Übung zeigen wir in zwei Schritten, dass für alle Familien kompakter topologischer Räume $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ das Produkt

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

wiederum kompakt ist (in Serie 3, Übung 6 hatten Sie dies für endliche Produkte gezeigt).

- (a) (**) Zeigen Sie, dass jede Überdeckung des Produktes durch Zylinder eine endliche Teilüberdeckung hat¹.
- (b) (**) Sei X ein beliebiger topologischer Raum mit Subbasis $\mathcal{B}$. Angenommen, für alle Überdeckungen $\mathcal{V} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von X mit Elementen B_α von $\mathcal{B}$ (d.h. also $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$) gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(B_{\alpha_1}, \dots, B_{\alpha_n})$ von X . Zeigen Sie, dass X dann kompakt ist².

Lösung für Übung 6:

- (a) Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung durch Zylinder. Jeder dieser Zylinder ist von der Form $\pi_\alpha^{-1}(U)$ mit $U \subset X_\alpha$ für ein gewisses $\alpha \in A$. Für alle $\alpha \in A$ sei $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{U}$ die Teilmenge der Elemente $\pi_\alpha^{-1}(U)$ mit $U \subset X_\alpha$.

Lemma 3. Es gibt $\alpha \in A$ mit

$$\bigcup \mathcal{U}_\alpha = X.$$

Beweis. Falls dies nicht gilt, so gibt es $z_\alpha \in X_\alpha$ mit $z_\alpha \notin \pi_\alpha^{-1}(U)$ für alle $\pi_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{U}_\alpha$. Dann liegt aber $(z_\alpha)_\alpha \in \prod_\alpha X_\alpha$ nicht in $\bigcup \mathcal{U}$. Das ist ein Widerspruch. $\square$



Dank dieses Lemmas gibt es $\alpha \in A$ mit $\bigcup \mathcal{U}_\alpha = X$. Das heisst, dass $\{\mathcal{U}\}_{\pi_\alpha^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{U}_\alpha}$ eine Überdeckung von X_α ist. Da X_α kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{\mathcal{U}\}_{\mathcal{U} \in \mathcal{T}}$ von X_α . Nun ist

$$\bigcup_{\mathcal{U} \in \mathcal{T}} \pi_\alpha^{-1}(\mathcal{U}) = X$$

eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$.

- (b) Wir zeigen zuerst, dass es eine maximale offene Überdeckung $\mathcal{C}$ ohne endliche Teilüberdeckung gibt (maximal bedeutet: $\mathcal{C} \cup \{\mathcal{U}\}$ für eine beliebige offene Menge $\mathcal{U} \notin \mathcal{C}$ hat eine endliche Teilüberdeckung). Dies folgt aus dem Lemma von Zorn.

Lemma 4 (Lemma von Zorn). *Jede Menge mit einer transitiven, reflexiven und antisymmetrischen Ordnung, in der jede Kette eine obere Schranke hat, besitzt ein maximales Element.*

Mann sieht, dass auf der Menge aller offenen Überdeckungen ohne endliche Teilüberdeckung die Inklusion eine Ordnung ist, welche die Voraussetzungen des Lemmas von Zorn erfüllt. Es folgt, dass es eine maximale offene Überdeckung $\mathcal{C}$ ohne endliche Teilüberdeckung gibt. Die Menge $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ kann nicht eine Überdeckung von X sein, da wir sonst mit der Hypothese zu $\mathcal{B}$ eine endliche Teilüberdeckung finden könnten.

Seien $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ und $\mathcal{U} \in \mathcal{C}$ mit $x \in \mathcal{U}$. Da $\mathcal{B}$ eine Subbasis ist, gibt es $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ mit

$$x \in \bigcap_{i=1}^n B_i \subset \mathcal{U}.$$

Für alle $i = 1, \dots, n$ gibt es (wegen der Maximalität von $\mathcal{C}$) eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{C} \cup \{B_i\}$, das heisst es gibt $\{C_1^i, \dots, C_{j_i}^i\} \subset \mathcal{C}$ mit

$$B_i \cup \bigcup_{k=1}^{j_i} C_k^i = X.$$

Nun ist aber

$$\mathcal{U} \cup \bigcup_{i,k} C_k^i$$

eine endlich Teilüberdeckung von $\mathcal{C}$, denn

$$\mathcal{U} \cup \bigcup_{i,k} C_k^i \supset \left(\bigcap_{i=1}^n B_i \right) \cup \bigcup_{i,k} C_k^i = X.$$

Das ist ein Widerspruch.

¹ Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung mit Elementen in $\mathcal{B}$. Für alle $\alpha \in A$ sei $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{U}$ die Teilmenge der Elemente $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ mit $\mathcal{U} \subset X_\alpha$.
² Zeigen Sie, dass es $\alpha \in A$ $\mathcal{U}_\alpha$ eine Überdeckung von $\prod X_\alpha$ existiert.
 Zeigen Sie zuerst, dass es eine maximale offene Überdeckung $\mathcal{C}$ ohne endliche Teilüberdeckung gibt (maximal bedeutet: $\mathcal{C} \cup \{\mathcal{U}\}$ für eine beliebige offene Menge $\mathcal{U} \notin \mathcal{C}$ hat eine endliche Teilüberdeckung).