Serie 6

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1.

(a) Zeigen Sie die folgende Aussage, das sogenannte *Verklebungslemma*: Seien X und Y topologische Räume und sei $X = A \cup B$ eine Überdeckung von X mit abgeschlossenen Mengen $A, B \subseteq X$. Weiter seien $f\colon A \to Y$ und $g\colon B \to Y$ stetige Abbildungen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A \cap B$ und sei $h\colon X \to Y$ definiert durch

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in A, \\ g(x), & \text{falls } x \in B. \end{cases}$$

Dann h ist eine wohldefinierte stetige Abbildung.

Bemerkung: Das Verklebungslemma lässt sich verallgemeinern für eine Überdeckung von X mit endlich vielen abgeschlossenen Mengen, aber auch für eine beliebige Überdeckung von X mit offenen Mengen.

(b) Sei X ein topologischer Raum und seien γ_0 und γ_1 zwei Wege in X mit $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$. Zeigen Sie, dass dann der Weg $\gamma_0\gamma_1$ stetig ist.

(c) Sei X ein topologischer Raum und seien $x, y, z \in X$. Seien γ_0 und γ_0' zwei Wege in X von x nach y und γ_1 und γ_1' zwei Wege in X von y nach z. Zeigen Sie, dass falls $\gamma_0 \simeq \gamma_0'$ und $\gamma_1 \simeq \gamma_1'$ rel Endpunkte gilt, so gilt auch $\gamma_0\gamma_1 \simeq \gamma_0'\gamma_1'$ rel Endpunkte.

<u>*Lösung für Übung 1:*</u>

(a) Wenn $x \in A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ist h wohldefiniert und wenn $x \in A \cap B$ haben wir $f(x) = g(x)$, also h auch wohldefiniert über $A \cap B$ ist.

Sei F eine abgeschlossene Menge. Dann

$$\begin{aligned} h^{-1}(F) &= (f^{-1}(F) \cap A) \cup (g^{-1}(F) \cap B) \\ &= (F_A \cap A) \cup (F_B \cap B), \end{aligned}$$

mit F_A und F_B zwei abgeschlossenen Mengen, da f und g stetig sind. Es folgt, dass $h^{-1}(F)$ auch abgeschlossen ist.

(b) Dies folgt aus dem Verklebungslemma.

(c) Wegen $\gamma_0 \simeq \gamma_0'$ gibt es eine Homotopie $H_0\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ mit $H_0(s,0) = \gamma_0(s)$, $H_0(s,1) = \gamma_0'(s)$ für alle $s \in [0,1]$ und $H_0(0,t) = x, H_0(1,t) = y$ für alle $t \in [0,1]$. Da weiter $\gamma_1 \simeq \gamma_1'$ gilt, gibt es eine Homotopie $H_1\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ mit $H_1(s,0) = \gamma_1(s)$ und $H_1(s,1) = \gamma_1'(s)$ für alle $s \in [0,1]$ und $H_1(0,t) = y, H_1(1,t) = z$ für alle $t \in [0,1]$. Definiere

$$H\colon [0,1] \times [0,1] \to X, \quad H(s,t) = \begin{cases} H_0(2s,t), & \text{falls } s \in [0,1/2], \\ H_1(2s-1,t), & \text{falls } s \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Wegen $H_0(1,t) = H_1(0,t)$ für alle $t \in [0,1]$ ist H nach Teilaufgabe (a) wohldefiniert und stetig. Weiter ist nach der Definition von $\gamma_0\gamma_1$ und $\gamma_0\gamma_1'$ offensichtlich, dass H eine Homotopie von $\gamma_0\gamma_1$ nach $\gamma_0\gamma_1'$ ist. Somit ist $\gamma_0\gamma_1 \simeq \gamma_0'\gamma_1$ rel Endpunkte bewiesen.

Übung 2. Zeigen Sie, dass $\{5\} \subset \mathbb{Q}$ ein Retrakt von $\mathbb{Q}$ ist, aber kein Deformationsretrakt.

Lösung für Übung 2: Die konstante Abbildung $\mathbb{Q} \to \{5\}, x \mapsto 5$ ist eine Retraktion, also $\{5\}$ ein Retrakt von $\mathbb{Q}$. Da $\mathbb{Q}$ nicht wegzusammenhängend ist, folgt aus Übung 5 (a) der zweite Teil der Aussage.

Übung 3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $\mathrm{id}_{S^n}, p \colon S^n \to S^n$ die stetigen Abbildungen gegeben durch $\mathrm{id}_{S^n}(v) = v$ und $p(v) = -v$.

(a) Zeigen Sie für $n = 1$, dass p homotop zu id_{S^n} ist.

(b) Zeigen Sie für alle ungeraden n, dass p homotop zu id_{S^n} ist.

Lösung für Übung 3: Sei $n = 2k-1$ ungerade. Wir betrachten $S^n \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n$ und schreiben $\underline{x} = (x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k)$ für die Elemente von S^n. Sei $v \colon S^n \to S^n$ die folgende Abbildung:

$$v(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k) \coloneqq (y_1, -x_1, \ldots, y_k, -x_k).$$

Wir bemerken, dass v stetig ist, und dass $< \underline{x}, v(\underline{x}) >= 0$ für alle $\underline{x} \in S^n$, wobei $< \cdot, \cdot >$ für das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^{n+1}$ steht.

Wir definieren die Homotopie $H \colon S^n \times [0,1] \to S^n$ mithilfe v durch die folgende Formel:

$$H(\underline{x}, t) \coloneqq \cos(\pi t)\underline{x} + \sin(\pi t) v(\underline{x}).$$

Es ist leicht zu sehen, dass H wohldefiniert ist (überprüfen Sie, dass $H(\underline{x}, t) \in S^n$), stetig, und dass $H(\underline{x}, 0) = \underline{x}$, $H(\underline{x}, 1) = -\underline{x}$ für alle $\underline{x} \in S^n$.

Bemerkung 1. *Der Beweis benutzt die Existenz einer stetigen Abbildung $v \colon S^n \to S^n$ mit $< \underline{x}, v(\underline{x}) >= 0$ für alle $\underline{x} \in S^n$. Solch ein v heisst unitäres Vektorfeld. Es existiert nicht in S^n für gerade n (dieser Satz wird* Hairy Ball Theorem *genannt).*

Übung 4. Zeigen Sie, dass das Möbiusband homotopieäquivalent zum Zylinder $S^1 \times [0,1]$ ist.

Lösung für Übung 4: Das Möbiusband M wurde in der Vorlesung definiert als der Abbildungstorus $M = [-1,1] \times [0,1]/\alpha$ für die Abbildung

$$\alpha \colon [-1,1] \to [-1,1], x \mapsto -x.$$

Wir behaupten, dass sowohl M als auch der Zylinder $S^1 \times [0,1]$ homotopieäquivalent zu S^1 sind, wobei wir hier $S^1 \cong [0,1]/\sim$ für $0 \sim 1$ benutzen wollen. Eine Homotopieäquivalenz zwischen M und S^1 ist gegeben durch $f \colon M \to S^1, [(x,t)] \mapsto [t]$ mit Homotopieinversem $g \colon S^1 \to M, [t] \mapsto [(0,t)]$.

Überzeugen Sie sich, dass die Abbildungen wohldefiniert und stetig sind. Es gilt $f \circ g = \mathrm{id}_{S^1}$ und $g \circ f \simeq \mathrm{id}_M$ mittels der Homotopie

$$M \times [0,1] \to M, ([(x,t)], s) \to ([x \cdot s, t]).$$

Ähnlich konstruiert man eine Homotopieäquivalenz zwischen $S^1 \times [0,1]$ und S^1, woraus die Behauptung folgt, da Homotopieäquivalenz eine Äquivalenzrelation ist.

Übung 5. Seien X und Y homotopieäquivalente Räume.

(a) Zeigen Sie, dass X genau dann wegzusammenhängend ist, wenn Y wegzusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn Y zusammenhängend ist.

(c) ($\star$) Sei $f \colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Bezeichne $[z]_Z$ und $[z]_W$ die Zusammenhangs- bzw. die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes z in X oder Y. Zeigen Sie, dass $[z]_Z \mapsto [f(z)]_Z$ und $[z]_W \mapsto [f(z)]_W$ Bijektionen zwischen den Zusammenhangskomponenten bzw. den Wegzusammenhangskomponenten von X und Y definieren.

Lösung für Übung 5:

(a) Sei $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz und sei $g\colon Y \to X$ die Homotopieinverse von f, d.h. es gilt $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Angenommen, X ist wegzusammenhängend. Dann ist auch $f(X) \subseteq Y$ wegzusammenhängend und es genügt für jeden Punkt in Y einen Pfad zu einem Punkt in $f(X)$ zu finden. Sei $H\colon Y \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie zwischen $f \circ g$ und id_Y, es gilt also $H(y,0) = f(g(y))$ und $H(y,1) = y$ für alle $y \in Y, t \in [0,1]$. Weiter sei nun $y \in Y$ beliebig. Dann ist $z := f(g(y)) \in f(X)$ und $[0,1] \to Y, t \mapsto H(y,t)$ definiert einen Pfad von z nach y, woraus die Behauptung folgt.

(b) Sei $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinversem g wie in (a) und H wiederum eine Homotopie zwischen $f \circ g$ und id_Y. Angenommen, X ist zusammenhängend und es gelte $Y = U \cup V$ für disjunkte, offene Mengen $U, V \subseteq Y$. Dann ist $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ die Vereinigung zweier disjunkter offener Teilmengen von X, also muss nach Voraussetzung (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $f^{-1}(U) = \emptyset$ sein. Wir behaupten, dass daraus $U = \emptyset$ folgt. Zunächst bemerken wir, dass $(f \circ g)(Y) \subseteq V$ gilt. Sei $y \in Y$. Dann ist wiederum $[0,1] \to Y, t \mapsto H(y,t)$ ein Pfad von $f(g(y))$ nach y. Wegen $f(g(y)) \in V$ haben wir somit einen Pfad von y zu einem Punkt in V gefunden und es muss $y \in V$ gelten. Somit gilt für alle $y \in Y$, dass $y \in V$ ist, also $U = \emptyset$ wie gewünscht.

(c) Da stetige Abbildungen Zusammehang und Wegzusammenhang erhalten, induziert jede stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ eine Funktion von der Menge der (Weg-)zusammenhangskomponenten von X in die Menge der (Weg-)zusammenhangskomponenten von Y, wie in (c) angegeben. Wir wollen zeigen, dass

$$[f(g(x))]_Z = [x]_Z, \quad [f(g(x))]_W = [x]_W.$$

Analog folgt dann

$$[g(f(x))]_Z = [x]_Z, \quad [g(f(x))]_W = [x]_W.$$

Das hiesse, dass f und g Inverse sind für die Zusammenhangs- bzw. Wegzusammenhangskomponenten von X und Y. Also würden dann $[z]_Z \mapsto [f(z)]_Z$ und $[z]_W \mapsto [f(z)]_W$ Bijektionen zwischen den Zusammenhangskomponenten bzw. den Wegzusammenhangskomponenten von X und Y definieren.

Sei $H\colon [0,1] \times X \to X$ eine Homotopie mit

$$H(0,\cdot) = \mathrm{Id}_X, \quad H(1,\cdot) = g \circ f.$$

Den Pfad $\gamma(t) := H(t,x)\colon [0,1] \to X$ geht von x zu $g(f(x))$. Es folgt, dass x und $g(f(x))$ in den gleichen Zusammenhangs- bzw. Wegzusammenhangskomponente von X sind. Die Aussage folgt.

Übung 6. $(\star)$ Zeigen Sie, dass $O_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ ein Deformationsretrakt ist. Die topologische Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$ ist in Serie 5, Übung 4 definiert[1].

Lösung für Übung 6: Das Gram-Schmidt-Verfahren kann als Rechtsmultiplikation mit einer oberen Dreiecksmatrix mit positiven Diagonaleinträgen verstanden werden. Desweiteren hängen die Einträge dieser Matrix, sie sei mit $GS(A)$ bezeichnet, stetig von der zu orthogonalisierenden Matrix A in $GL_n(\mathbb{R})$ ab. D.h. wir können eine Retraktion durch

$$GL_n(\mathbb{R}) \to O_n(\mathbb{R}) : A \mapsto A \cdot GS(A)$$

definieren. Dies ist eine Deformationsretraktion, weil

$$GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) : A \mapsto A \cdot GS(A)$$

via folgender Homotopie homotop zur Identität ist:

$$h\colon GL_n(\mathbb{R}) \times [0,1] \to GL_n(\mathbb{R}) : (A,t) \mapsto A \cdot ((1-t)GS(A) + tI_n).$$

(Sie können eine detaillierte Lösung hier finden: `https://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/pub/Kraushar.pdf`, Lemma 2.3.13)

Übung 7. (Koprodukt in der Kategorientheorie) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Seien A und B zwei Objekte von $\mathcal{C}$. Ein *Koprodukt* C von A und B ist ein Objekt von $\mathcal{C}$ mit zwei Morphismen $\alpha \in \mathcal{C}(A, C)$ und $\beta \in \mathcal{C}(B, C)$, sodass folgendes gilt: Für alle Objekte D von $\mathcal{C}$ und Morphismen $\alpha' \in \mathcal{C}(A, D)$ und $\beta' \in \mathcal{C}(B, D)$ **gibt** es einen **eindeutigen** Morphismus $\gamma \in \mathcal{C}(C, D)$ mit $\alpha' = \gamma \circ \alpha$ und $\beta' = \gamma \circ \beta$.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\alpha'"] & \\ C \arrow[rr, dashed, "\exists!\gamma"] & & D \\ & B \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "\beta'"'] & \end{tikzcd}$$

(a) Zeigen Sie, dass das Koprodukt, sofern es existiert, eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus ist. Genauer gesagt: sind C_1 mit α_1, β_1 und C_2 mit α_2, β_2 wie oben beide ein Koprodukt von A und B, so gibt es einen eindeutigen Isomorphismus $f\colon C_1 \to C_2$ mit $f \circ \alpha_1 = \alpha_2$ und $f \circ \beta_1 = \beta_2$.

Bemerkung: Man spricht deshalb auch von dem Koprodukt von A und B, statt einem Koprodukt von A und B.

(b) Bestimmen Sie das Koprodukt von zwei Objekten A und B in den folgenden Kategorien.

(i) $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$.
(ii) $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$.
(iii) $\mathcal{C} = \mathbf{Vek}_{\mathbb{R}}$ (Objekte: alle $\mathbb{R}$-Vektorräume, Morphismen: $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen).
(iv) $\mathcal{C}$ die Kategorien aller topologischen Räumen mit Basispunkt, und Morphismen den basispunkterhaltenden stetigen Abbildungen.
(v) $\mathcal{C}$ ist deine Lieblingskategorie.
(vi) Können Sie eine Kategorie finden, die keine Koprodukte hat?

Lösung für Übung 7:

(a) Sei (C, α, β) ein Koprodukt von A und B. Von der Definition mit $D = C$, $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$ haben wir, dass es einen eindeutigen Morphismus $\gamma \in \mathcal{C}(C, C)$ mit $\alpha' = \gamma \circ \alpha$ und $\beta' = \gamma \circ \beta$ gibt. Aber $1_C \in \mathcal{C}(C, C)$ erfüllt $\alpha = 1_C \circ \alpha$ und $\beta = 1_C \circ \beta$. Es folgt, dass $\gamma = 1_C$.

Sei (D, α', β') ein weiteres Koprodukt von A und B. Dann gibt es einen eindeutigen Morphismus $\gamma \in \mathcal{C}(C, D)$ mit $\alpha' = \gamma \circ \alpha$ und $\beta' = \gamma \circ \beta$, da C ein Koprodukt ist. Der Objekt D ist auch ein Koprodukt, also haben wir einen eindeutigen $\gamma' \in \mathcal{C}(D, C)$ mit $\alpha = \gamma' \circ \alpha'$ und $\beta = \gamma' \circ \beta'$. Man sieht, dass $\gamma' \circ \gamma \in \mathcal{C}(C, C)$ die zwei Gleichungen $\alpha = \gamma' \circ \gamma \circ \alpha$ und $\beta = \gamma' \circ \gamma \circ \beta$ erfüllt. Das heisst, dass $\gamma' \circ \gamma = 1_C \in \mathcal{C}(C, C)$. Aus dem gleichen Grunde haben wir $\gamma \circ \gamma' = 1_D \in \mathcal{C}(D, D)$. Es endet die Übung.

(b) (i) Das Koprodukt von A und B für **Set** ist $(A \sqcup B; i_A, i_B)$ mit $i_A\colon A \to A \sqcup B$ und $i_B\colon B \to A \sqcup B$ die offensichtliche Inklusion (wobei sich $A \sqcup B$ als $\{(a, 0) \mid a \in A\} \cup \{(b, 1) \mid b \in B\} \subset (A \cup B) \times \{0, 1\}$ definieren lässt).

(ii) Das Koprodukt von A und B für **Top** ist der Summenraum $(A + B; i_A, i_B)$ mit $i_A\colon A \to A \cup B$ und $i_B\colon B \to A \cup B$ die offensichtlichen Inklusionen.

(iii) Das Koprodukt von A und B für $\mathbf{Vek}_{\mathbb{R}}$ ist $(A \oplus B; i_A, i_B)$ mit $i_A\colon A \to A \oplus B$ und $i_B\colon B \to A \oplus B$ die offensichtliche Inklusion.

(iv) Das Koprodukt von A und B für $\mathcal{C}$ ist die Wedgesumme $(A \vee B; i_A, i_B)$ mit $i_A\colon A \to A \vee B$ und $i_B\colon B \to A \vee B$ die offensichtlichen Inklusionen.

(v)

(vi) Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie, mit allen zusammenhängenden topologischen Räumen als Objekten und stetigen Abbildungen als Morphismen sind. Es gibt einen Vergissfunktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Top}$, also müsste das Koprodukt von A und B gleich $A + B$ sein. Das ist ein Widerspruch, da $A + B$ nicht zusammenhängend ist.

[1] Benutzen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren.