Serie 7

Die Übungen haben 0, 1, 2 oder 3 Sterne. Ohne Sterne heisst, dass die Übung fast eine Anwendung des Kurses ist. Wenn es 1, 2 oder 3 Sterne gibt, bedeutet es, dass die Übung schwieriger oder wirklich schwierig ist. Wenn ein Übung 1, 2 oder 3 Sterne hat, gibt es fast immer einen Hinweis auf den Übungsblatt. Versuchen Sie die Übungen am besten zuerst ohne Hinweise!

* * *

Übung 1. Seien X, Y topologische Räume. Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Sei $x_0 \in X$ beliebig und $y_0 \in Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Beweisen Sie die Funktorialität der Fundamentalgruppe, also folgende Aussagen.

(a) $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $[\sigma] \mapsto [f \circ \sigma]$ definiert einen Gruppenhomomorphismus.

(b) $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

(c) Sei Z ein topologischer Raum, $g\colon Y \to Z$ stetig und $z_0 \in Z$ mit $z_0 = g(y_0) = g(f(x_0))$. Dann gilt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, wobei $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $g_*\colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Z, z_0)$ und $(g \circ f)_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, z_0)$.

<u>*Lösung für Übung 1:*</u>

(a) Für $f\colon X \to Y$ stetig ist zu zeigen, dass

$$f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, f(x_0)), \quad [\sigma] \mapsto [f \circ \sigma]$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit von f_*: Falls $[\sigma] = [\sigma']$ gilt, so ist $\sigma \simeq \sigma'$ rel $\{0, 1\}$ via einer Homotopie h. Damit gilt $f \circ \sigma \simeq f \circ \sigma'$ rel $\{0, 1\}$ via $f \circ h$ und insbesondere $[f \circ \sigma] = [f \circ \sigma']$. Wir zeigen noch, dass f_* ein Gruppenhomomorphismus ist: Es gilt

$$f_*([\sigma][\tau]) = f_*([\sigma\tau]) = [f \circ \sigma\tau] = [(f \circ \sigma)(f \circ \tau)] = [f \circ \sigma][f \circ \tau] = f_*([\sigma])g_*([\tau]),$$

wobei wir in der dritten Gleichung $f \circ \sigma\tau = (f \circ \sigma)(f \circ \tau)$ benutzen (was sich leicht mit der Definition der Verknüpfung von Wegen prüfen lässt).

(b) Es gilt $[\mathrm{id}_X \circ \sigma] = [\sigma]$ für alle Schleifen σ an x_0.

(c) Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ stetig und $x_0 \in X$. Wir betrachten die Gruppenhomomorphismen

$$f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0)) \text{ und } g_*\colon \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(Z, g(f(x_0))),$$

wie in (a) definiert, und zeigen $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$: Es gilt für alle Schleifen σ an x_0:

$$(g \circ f)_*([\sigma]) = [(g \circ f) \circ \sigma] = [g \circ (f \circ \sigma)] = g_*([f \circ \sigma]) = g_*(f_*([\sigma])).$$

Übung 2. Sei $A \subseteq X$ ein Retrakt mit Retraktion $\rho\colon X \to A$ und bezeichne $i\colon A \to X$ die Inklusion. Sei $a \in A \subseteq X$.

(a) Zeigen Sie, dass $i_*\colon \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ injektiv ist und $\rho_*\colon \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$ surjektiv ist.

(b) Sei ρ nun eine Deformationsretraktion. Nehmen Sie zusätzlich an, dass die Homotopie $H\colon X \times [0, 1] \to X$ von $H_0 = i \circ \rho$ nach $H_1 = \mathrm{id}_X$ relativ A ist (d.h. für alle $t \in [0, 1]$, $x \in A$ gilt $H_t(x) = x$). Zeigen Sie, dass dann i_* und ρ_* zueinder inverse Gruppenisomorphismen sind.

(c) ($\star$) Sei ρ eine Deformationsretraktion. Zeigen Sie, dass auch ohne die zusätzliche Annahme in (b) folgt, dass i_* und ρ_* zueinder inverse Gruppenisomorphismen sind.

Eine Deformationsretraktion mit der Zusatzannahme aus (b) wird oft „starke" Deformationsretraktion genannt (z.B. von Jänich). In anderen Quellen (z.B. Hatcher) ist die Zusatzannahme Bestandteil der Definition einer Deformationsretraktion.

<u>*Lösung für Übung 2:*</u>

(a) Es gilt $\rho \circ i = \mathrm{id}_A$ und somit für die induzierten Homomorphismen
$$\rho_* \circ i_* = (\rho \circ i)_* = (\mathrm{id}_A)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(A,a)}.$$
Also ist i_* injektiv und ρ_* surjektiv.

(b) Nach Voraussetzung gibt es eine Homotopie $H\colon X \times [0,1] \to X$ zwischen $X \to X$, $x \mapsto \rho(x)$ und id_X, sodass $H(x,t) = x$ für alle $x \in A$, $t \in [0,1]$ gilt. Für $[\gamma] \in \pi_1(X,a)$ definiert dann $H(\gamma(\cdot), \cdot)$ auch eine Homotopie zwischen der Schleife
$$\begin{aligned} \sigma\colon\ & [0,1] \to A, \\ & s \quad \mapsto H(\gamma(s),0) = \rho(\gamma(s)) \in A \end{aligned}$$
und $\gamma\colon [0,1] \to X$; diese Homotopie ist wegen $\gamma(0) = \gamma(1) = a \in A$ relativ $\{0,1\}$. Wegen $\rho \circ \sigma = \sigma$ gilt also
$$i_*\rho_*([\gamma]) = i_*\rho_*([\sigma]) = i_*([\sigma]) = [\sigma] = [\gamma],$$
also $i_* \circ \rho_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,a)}$ und somit mit Teil (a) die Behauptung.

(c) Es gibt eine Homotopie zwischen $i \circ \rho\colon X \to X$ und $\mathrm{id}_X\colon X \to X$. Es folgt, dass
$$i_* \circ \rho_* = (i \circ \rho)_*\colon \pi_1(X,a) \to \pi_1(X,(i \circ \rho)(a))$$
ein Isomorphismus ist (nach Proposition 12.2 der Vorlesung). Ausserdem ist $\rho_* \circ i_*$ die Identität auf $\pi_1(A,a)$. Nun folgt die Übung aus der folgenden Aussage, die in allen Kategorien gilt (warum?): ist für zwei Morphismen α, β die Verknüpfung $\alpha \circ \beta$ die Identität und die Verknüpfung $\beta \circ \alpha$ ein Isomorphismus, dann ist $\beta \circ \alpha$ auch die Identität.

Übung 3.

(a) Seien X und Y topologische Räume und $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Finden Sie einen (kanonischen) Gruppenisomorphismus zwischen $\pi_1(X \times Y, (x_0,y_0))$ und $\pi_1(X,x_0) \times \pi_1(Y,y_0)$.

(b) Sei $X = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in X$ beliebig. Bestimmen Sie den Isomorphietyp von $\pi_1(X,x_0)$.

Hinweis: Sie dürfen hier benutzen, dass für $n = 1$, $\pi_1(X,x_0)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist. Diese Aussage wird in der Vorlesung noch gezeigt.

Lösung für Übung 3:

(a) Wir zeigen, dass die Abbildung
$$\phi\colon \pi_1\big(X \times Y, (x_0,y_0)\big) \to \pi_1(X,x_0) \times \pi_1(Y,y_0), \quad [\gamma] \mapsto \big([\pi_X \circ \gamma], [\pi_Y \circ \gamma]\big)$$
ein Gruppenisomorphismus ist, wobei π_X und π_Y die Projektionsabbildungen auf X beziehungsweise Y bezeichnen.

Offenbar ist ϕ wohldefiniert, denn wenn $[\gamma] = [\gamma']$ gilt, so gibt es eine Homotopie H rel $\{0,1\}$ von γ nach γ'. Da die Projektionsabbildungen stetig sind, sind auch $\pi_X \circ H$ und $\pi_Y \circ H$ Homotopien rel $\{0,1\}$ von $\pi_X \circ \gamma$ nach $\pi_X \circ \gamma'$ beziehungsweise von $\pi_Y \circ \gamma$ nach $\pi_Y \circ \gamma'$. Folglich ist $([\pi_X \circ \gamma], [\pi_Y \circ \gamma]) = ([\pi_X \circ \gamma'], [\pi_Y \circ \gamma'])$.

ϕ ist ein Gruppenhomomorphismus, da
$$\begin{aligned} \phi([\gamma][\gamma']) = \phi([\gamma\gamma']) &= ([\pi_X \circ (\gamma\gamma')], [\pi_Y \circ (\gamma\gamma')]) \\ &= ([(\pi_X \circ \gamma)(\pi_X \circ \gamma')], [(\pi_Y \circ \gamma)(\pi_Y \circ \gamma')]) \\ &= ([\pi_X \circ \gamma][\pi_X \circ \gamma'], [\pi_Y \circ \gamma][\pi_Y \circ \gamma']) \\ &= ([\pi_X \circ \gamma], [\pi_Y \circ \gamma])([\pi_X \circ \gamma'], [\pi_Y \circ \gamma']) \\ &= \phi([\gamma])\,\phi([\gamma']). \end{aligned}$$

Weiter ist ϕ surjektiv. Denn ist $([\gamma_0], [\gamma_1]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$, so ist

$$\gamma(t) := (\gamma_0(t), \gamma_1(t))$$

eine Schleife in $X \times Y$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = (x_0, y_0)$ und $\phi([\gamma]) = ([\gamma_0], [\gamma_1])$.

Es bleibt die Injektivität zu zeigen.
Seien dazu $[\gamma], [\gamma'] \in \pi_1\big(X \times Y, (x_0, y_0)\big)$. Wir schreiben $\gamma(t) = (\gamma_0(t), \gamma_1(t))$ und $\gamma'(t) = (\gamma_0'(t), \gamma_1'(t))$. Dann ist $\phi([\gamma]) = ([\gamma_0], [\gamma_1])$ und $\phi([\gamma']) = ([\gamma_0'], [\gamma_1'])$. Sei nun $\phi([\gamma]) = \phi([\gamma'])$. Dann gibt es Homotopien $h_{0,t}$, $h_{1,t}$ rel $\{0, 1\}$, wobei $h_{0,t}$ eine Homotopie rel $\{0, 1\}$ in X von γ_0 nach γ_0' und $h_{1,t}$ eine Homotopie rel $\{0, 1\}$ in Y von γ_1 nach γ_1' ist. Somit ist jedoch $H_t(s) := (h_{0,t}(s), h_{1,t}(s))$ eine Homotpie rel $\{0, 1\}$ von γ nach γ', womit $[\gamma] = [\gamma']$ gilt.

(b) Aus iterativer Anwendung von Teilaufgabe (a) folgt $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}^n$.

Übung 4. Sei $\mathcal{E}$ die Kategorie mit Objekten den Euklidischen Räumen $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ und Morphismen $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ den glatten Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$, die den Ursprung auf den Ursprung senden, mit der üblichen Verknüpfung von Funktionen. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $\mathcal{F}$, die jedem $\mathbb{R}^n$ sich selbst und jedem $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ das Differential $Df(0)$ von f im Ursprung zuordnet, einen kovarianten Funktor von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{E}$ definiert.

Lösung für Übung 4: Sei $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Da die Abbildung $Df(0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear ist, ist sie auch eine glatte Abbildung. Es folgt, dass $\mathcal{F}(f) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Das heisst, dass f wohldefiniert ist. Zeigen wir, dass $\mathcal{F}$ ein kovarianter Funktor ist. Wir müssen lediglich prüfen, dass für alle $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\ell)$ $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(g)$ gilt. Aber

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(g \circ f) &= D(g \circ f)(0)\\ &= Dg(f(0)) \circ Df(0)\\ &= Dg(0) \circ Df(0)\\ &= \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f).\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist die Kettenregel, und die dritte Gleichung kommt von $f(0) = 0$.

Übung 5. Sei $\mathcal{U}$ gegeben durch folgendes Tripel von Daten:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ ist die Klasse der kleinen Kategorien, d.h.

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ ist eine Kategorie, für welche } \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \text{ eine Menge ist}\},$$

- $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ist die Menge der kovarianten Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$,
- $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ ist durch Nacheinanderausführen von Funktoren gegeben.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}$ eine Kategorie bildet.

Lösung für Übung 5: Sei $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ der Identitätsfunktor für alle Objekte $\mathcal{C}$ von $\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$. Dieser ist der Identitätsmorphismus $1_{\mathcal{C}}$, denn für alle $\mathcal{F} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ und $\mathcal{F}' \in \mathrm{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$, haben wir

$$\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \circ \mathcal{F}' = \mathcal{F}', \quad \mathcal{F} \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} = \mathcal{F}.$$

Um eine Kategorie zu haben, sollen wir zeigen, dass wir für alle $(\mathcal{H}, \mathcal{G}, \mathcal{F}) \in \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{D}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{C}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{D}), \quad \mathcal{F} \circ (\mathcal{G} \circ \mathcal{H}) = (\mathcal{F} \circ \mathcal{G}) \circ \mathcal{H}$$

haben.

Seien $B, B', B'' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$, $f \in \mathrm{Hom}(B, B')$ und $f' \in \mathrm{Hom}(B', B'')$. Wir haben die Komposition $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}(B) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(B)) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$ und

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{G}(f) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(f)) \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(\mathcal{G}(B)), \mathcal{F}(\mathcal{G}(B'))).$$

Am Ende haben wir

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}(f')) \circ \mathcal{F}(\mathcal{G}(f)) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(f') \circ \mathcal{G}(f)) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(f \circ f')) \in \mathrm{Hom}(B, B'').$$

Das heisst, dass $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ ein Funktor ist. Schliesslich muss man noch $\mathcal{F} \circ (\mathcal{G} \circ \mathcal{H}) = (\mathcal{F} \circ \mathcal{G}) \circ \mathcal{H}$ prüfen, was aber direkt folgt.

Übung 6. ($\star\star\star$) Finden Sie eine stetige Surjektion $S^1 \to S^2$. Können Sie für alle $m, n \in \mathbb{N}$ eine stetige Surjektion $S^m \to S^n$ finden?

Lösung für Übung 6: Wenn $m \geqslant n$ ist es nicht schwer, Beispiele zu finden. Wenn $m < n$ können Sie nach „space-filling curves " suchen. Es gibt eine surjektive stetige Abbildung

$$f_1 \colon [0, 1] \to [0, 1]^2.$$

(Nebenbemerkung: so ein f_1 ist niemals injektiv; denn dann wäre f_1 als stetige bijektive Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum ein Homöomorphismus, und wir wissen, dass $[0, 1]$ und $[0, 1]^2$ nicht homöomorph sind). Dann haben wir stetige surjektive Abbildungen $f_n \coloneqq f_1 \times \mathrm{Id} \colon [0, 1] \times [0, 1]^{n-1} \to [0, 1]^2 \times [0, 1]^{n-1} = [0, 1]^{n+1}$. Es folgt, dass es Abbildungen $f_{m,n} \colon [0, 1]^m \to [0, 1]^n$ gibt, die surjektiv und stetig sind. Da

$$[0, 1]^n \big/ \partial [0, 1]^n \cong S^n,$$

können wir nun surjektive stetige Abbildungen von S^m zu S^n konstruieren.